# 13.

# PARI/GP による重さ 1 のモジュラー形式の計算

小笠原 健[*1]（獨協医科大学）

## 13.1　はじめに

本稿では，レベルが素数 $p \equiv 3 \pmod 4$，重さが 1 のモジュラー形式に関して，その空間の次元および $q$ 展開を PARI/GP を用いて計算する手法を紹介する．重さが 1 の場合は，重さが 2 以上の場合と様子が大きく異なり，modular symbol による直接的な計算方法が適用できないため，$q$ 展開を具体的に求めるには別の手法を使わなければならない．最近，Schaeffer によって，重さ 1 のモジュラー形式を $\mathbb{C}$ 上および有限体上で計算する有用なアルゴリズムが与えられた．この手法の主な計算は，$f/E$（$f$ は重さ 2 のカスプ形式，$E$ は重さ 1 の Eisenstein 級数）の形の形式で生成される空間の中で，ある Hecke 作用素で安定な部分空間を見つけるというものである．アルゴリズムの中では，重さ 2 の空間の基底を求める際に modular symbol を用いており，Schaeffer は Sage に実装したようである．本稿で紹介する方法はレベルが素数の場合に限られているが，具体的な関数を使って統一的に計算できる点，modular symbol を利用しない点，および計算プログラムにループが含まれていない点で Schaeffer の方法とは趣がやや異なる．

[*1] Email: `t-ogswr@dokkyomed.ac.jp`

## 記号

$N$ を正の整数，$k$ を整数，$\chi$ を mod $N$ の Dirichlet 指標とするとき，$M_k(N,\chi), S_k(N,\chi)$ でそれぞれ重さ $k$，レベル $N$，指標 $\chi$ 付きの $\mathbb{C}$ 上のモジュラー形式の空間，カスプ形式の空間を表す．$\chi$ が自明な指標のときは，$M_k(N,\chi), S_k(N,\chi)$ を単に $M_k(N), S_k(N)$ で表す．

$\chi$ が有理指標のときには，空間 $M_k(N,\chi)$ には行列 $W_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$ が次で作用する（Atkin–Lehner 作用素という）；

$$(f|_k W_N)(\tau) = N^{\frac{k}{2}} \cdot (N\tau)^{-k} f\left(-\frac{1}{N\tau}\right), \quad f \in M_k(N,\chi). \tag{13.1}$$

この作用による固有空間を

$$M_k^{\pm}(N,\chi) := \{f \in M_k(N,\chi)\ ;\ f|_k W_N = \pm i^{-k} f\} \text{（複合同順）} \tag{13.2}$$

で表す．$W_N$ はカスプ形式の空間にも作用するので，その固有空間 $S_k^{\pm}(N,\chi)$ も同様に定義する．

## 13.2 Serre の結果

$p$ を $p \equiv 3 \pmod 4$ を満たす素数とし，$\chi_p$ で Kronecker 記号 $\left(\frac{-p}{\cdot}\right)$ を表すことにする．Serre は [11] において，重さ 1 のカスプ形式の空間 $S_1(p,\chi_p)$ の次元を Galois 表現の観点から調べている．次元 $\dim_{\mathbb{C}} S_1(p,\chi_p)$ については，現時点においても以下の Serre の結果が最も effective なのではないかと思われる．

**定理 13.2.1 (Serre, [11]).** $s$ と $a$ を次のものとする；

$$s := \sharp\{M/\mathbb{Q}\ ;\ \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \cong S_4,\ M \text{ は判別式 } -p \text{ の 4 次体の正規閉包 }\},$$
$$a := \sharp\{L/\mathbb{Q}\ ;\ \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong A_5,\ L \text{ は判別式 } p^2 \text{ の虚な 5 次体の正規閉包 }\}.$$

このとき，

$$\dim_{\mathbb{C}} S_1(p,\chi_p) = \frac{1}{2}(h_p - 1) + 2s + 4a \tag{13.3}$$

が成り立つ．ここで，$h_p$ は虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の類数である．

式 (13.3) の右辺において，$2s$ は $S_4$ 型，$4a$ は $A_5$ 型の正規化された Hecke 固有形式の個数を表している．また定理 13.2.1 は，レベルが素数 $p \equiv 3 \pmod 4$ のときは $A_4$ 型の形式は存在しないことも示している．（$S_4$ 型，$A_5$ 型，$A_4$ 型という術語については，小澤氏の報告 [13] を参照されたい．$S_4$ 型，$A_5$ 型，$A_4$ 型をまとめて例外型という．）

Serre はさらに，$W_N$ に関する固有空間の次元についても調べている．

定理 13.2.2 (Serre, [11])．定理 13.2.1 と同じ記号の下で，

$$\dim_{\mathbb{C}} S_1^{+}(p,\chi_p) = \frac{1}{2}(h_p - 1) + s + 2a, \tag{13.4}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} S_1^{-}(p,\chi_p) = s + 2a. \tag{13.5}$$

が成り立つ．

$S_1^{+}(p,\chi_p)$ の次元に含まれている項 $\frac{1}{2}(h_p-1)$ は，判別式 $-p$ の整係数 2 元 2 次形式に付随するテータ級数の線形結合となっているカスプ形式に由来するものである．このような形式は CM form と呼ばれ，Galois 表現の観点から言えば，二面体型の表現に対応するものである（cf. [13]）．

## 13.3 計算方法および $\mathbb{C}$ 上での計算例

この節では，レベルが素数 $p \equiv 3 \pmod 4$，$p \geq 7$ のときに，

- $S_1^{-}(p,\chi_p)$ の次元（$= s+2a$），
- $S_1^{-}(p,\chi_p)$ の元の $q$ 展開

を PARI/GP を使って計算する方法を説明する．

$p$ を $p \equiv 3 \pmod 4$，$p \geq 7$ を満たす素数とする．$k$ を

$$k := \begin{cases} 2 & (p \equiv 11 \pmod{12} \text{ のとき}) \\ 6 & (p \equiv 7 \pmod{12} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{13.6}$$

と定め，

$$\varphi_p(\tau) := \{\eta(\tau)\eta(p\tau)\}^k \in S_k^{+}(p) \tag{13.7}$$

とする．ここで，$\eta(\tau)$ は Dedekind エータ関数

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n), \quad q = e^{2\pi i\tau} \tag{13.8}$$

である．また，

$$d_p := \begin{cases} \dfrac{p+1}{12} & (p \equiv 11 \pmod{12} \text{ のとき}) \\ \dfrac{p+1}{4} & (p \equiv 7 \pmod{12} \text{ のとき}) \end{cases} \tag{13.9}$$

とおくと，$\varphi_p(\tau) = q^{d_p} + \cdots$ となる．つまり $d_p$ は $\varphi_p$ のカスプ $\infty$ での位数である．

正の整数 $d$ と可換環 $R$ に対して，$q$ を不定元とする多項式環 $R[q]$ の部分 $R$-加群 $R(d)$ を

$$R(d) := \{F(q) \in R[q]\ ;\ 1 \leq \deg F \leq d,\ F(0) = 0\} \cup \{0\} \tag{13.10}$$

で定義する．

ここで述べる計算方法の基盤となっているのが次の命題である；

命題 13.3.1. 次は完全系列である；

$$0 \longrightarrow S_1^-(p,\chi_p) \xrightarrow{\times\varphi_p} S_{k+1}^-(p,\chi_p) \xrightarrow{\Phi^-} \mathbb{C}(d_p). \tag{13.11}$$

ここで，$\Phi^-$ は $q$ 展開 $\sum_{n\geq 1} a_n q^n$ に $q$ の多項式 $\sum_{n=1}^{d_p} a_n q^n$ を対応させる（つまり，$q$ 展開を $d_p$ 番目の項で打切る）$\mathbb{C}$-線形写像である．

証明. $\mathrm{Ker}(\Phi^-) \subset \mathrm{Im}(\times\varphi_p)$ を示せばよい．まず，$\varphi_p$ は複素上半平面上に零点をもたないことに注意する．$g \in \mathrm{Ker}(\Phi^-)$ とすると，カスプ $\infty$ における $g$ の位数は $d_p$ より大きい．$g$ は $W_p$ の固有関数であり，$W_p$ は 0 を $\infty$ に移すことから，カスプ 0 と $\infty$ において $g$ は同じ位数をもつ．一方，$\varphi_p$ もカスプ 0 と $\infty$ で同じ位数（$= d_p$）をもつ．従って，$g/\varphi_p$ は $X_0(p)$ のカスプ 0 と $\infty$ を零点にもつ．つまり $g/\varphi_p \in S_1^-(p,\chi_p)$ である． □

注意 13.3.2. (1) Serre は $p \equiv 23 \pmod{24}$ の場合に，完全系列 (13.11) の類似物

$$0 \longrightarrow S_1^-(p,\chi_p) \xrightarrow{\times\eta(\tau)\eta(p\tau)} S_2^-(\Gamma_0(p)) \longrightarrow \mathbb{C}((p+1)/24).$$

を用いて，$\dim_{\mathbb{C}} S_1^-(p,\chi_p) > 0$ であるためには，モジュラー曲線 $X_0^+(p) = X_0(p)/W_p$ においてカスプ $\infty$ が $\frac{1}{2}(h_p - 1)$ 以上のギャップをもつ Weierstrass 点であることが必要十分であることを指摘した（cf. [11]）．

(2) 固有空間 $S_1^+(p,\chi_p)$，$S_{k+1}^+(p,\chi_p)$ に対しても，(13.11) と同様な完全系列があるが，ここでの計算では (13.11) を利用する方が簡便である．

完全系列 (13.11) から

$$s + 2a = \dim_{\mathbb{C}} S_1^-(p,\chi_p) = \dim_{\mathbb{C}} S_{k+1}^-(p,\chi_p) - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(\Phi^-) \tag{13.12}$$

となる．ここで，$\dim_{\mathbb{C}} S_{k+1}^-(p,\chi_p)$ については

$$\dim_{\mathbb{C}} S_{k+1}^-(p,\chi_p) = \begin{cases} \dfrac{p-11}{12} - \dfrac{1}{2}(h_p - 1) & (k=2,\ p \equiv 11 \pmod{12}) \\ \dfrac{p-3}{4} - \dfrac{1}{2}(h_p - 1) & (k=6,\ p \equiv 7 \pmod{12}) \end{cases}$$

である．Atkin–Lehner 作用素に関する固有空間の次元を明示している文献はあまり見かけないが，この公式は，例えば，$\kappa$ が 3 以上の奇数のとき，$S_\kappa^+(p,\chi_p)$ には CM form の空間 $S_\kappa^{\mathrm{CM}}(p,\chi_p)$ が含まれており，$\dim_{\mathbb{C}} S_\kappa^{\mathrm{CM}}(p,\chi_p) = h_p$ であることから導かれる（cf. [12]）．

空間 $S_{k+1}^-(p,\chi_p)$ の基底を生成すれば，$\mathrm{Im}(\Phi^-)$ の次元を計算することができるので，$S_1^-(p,\chi_p)$ の次元を求めることができる．Magma や Sage には

modular symbol を利用した計算アルゴリズムが実装されているので，これらを利用すれば $S^-_{k+1}(p,\chi_p)$ の基底を生成することができる（現在は PARI/GP でも modular symbol の計算ができるようになっているが，重さが偶数の場合に限られているようである）．しかし，$p$ の値が大きい場合にはこれらの方法では計算にかなりの時間がかかってしまう．

PARI/GP を利用して計算すること，および大きな $p$ に対しても効率よく計算するという観点に基づき，空間 $S^-_{k+1}(p,\chi_p)$ を何か具体的な関数を使って生成するということを考える．ここでは次のような関数を使って計算する．テータ級数 $\theta_p(\tau)$ を

$$\theta_p(\tau) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{x,y\in\mathbb{Z}} q^{3x^2+xy+\frac{p+1}{12}y^2} & (p \equiv 11 \pmod{12}) \\ \displaystyle\sum_{x,y\in\mathbb{Z}} q^{x^2+xy+\frac{p+1}{4}y^2} & (p \equiv 7 \pmod{12}) \end{cases} \tag{13.13}$$

とする．このとき $\theta_p\varphi_p \in S^+_{k+1}(p,\chi_p)$ である．ここで，

$$V^-_{p,\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} := \langle T_n(\theta_p\varphi_p)\ ;\ n \geq 1,\ \chi_p(n) = -1\rangle_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} \subset S^-_{k+1}(p,\chi_p), \tag{13.14}$$

$$V^-_p := V^-_{p,\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} \mathbb{Q} \tag{13.15}$$

と定義する．$\theta_p$ のような正定値整係数 2 元 2 次形式のテータ級数は，PARI/GP で $q$ 展開を指定した precision で計算するプログラムを書くことができる．また，$\varphi_p$ のようなエータ積についても，“`eta`” というコマンドで $q$ 展開を計算することができる．さらに，$q$ 展開に対する Hecke 作用素の作用も計算できる（Hecke 作用素の $q$ 展開の公式を実装すればよい）．

そのようにして $V^-_p$ の元の $q$ 展開を計算して，もし $\dim_{\mathbb{Q}} V^-_p = \dim_{\mathbb{C}} S^-_{k+1}(p,\chi_p)$ が成り立てば，$V^-_p$ から $S^-_{k+1}(p,\chi_p)$ の基底がとれて，それを用いて $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(\Phi^-)$ を計算することができる．次元 $\dim_{\mathbb{Q}} V^-_p$ は次のように計算することができる．

整数 $r_p$ を

$$r_p := \begin{cases} \dfrac{(k+1)(p+1)}{12} & (k=2,\ p \equiv 11 \pmod{12}) \\ \left[\dfrac{(k+1)(p+1)}{12}\right] + 1 & (k=6,\ p \equiv 7 \pmod{12}) \end{cases}$$

と定める．ここで，$[*]$ は $*$ を超えない最大の整数を表す．$k=2, p \equiv 11 \pmod{12}$ のときの $r_p$ はちょうど Sturm bound に等しいが，$k=6,\ p \equiv 7 \pmod{12}$ の場合は Sturm bound が整数にならないので，Sturm bound を超える最小の整数として $r_p$ を定義する．

正の整数 $i,j$ に対して，$a_j(T_i(\theta_p\varphi_p))$ で $T_i(\theta_p\varphi_p)$ の $j$ 番目の Fourier 係数を表すことにする．$r_p$ 次正方行列 $M_p=(m_{ij})$ と $r_p\times d_p$ 行列 $\widetilde{M}_p=(\widetilde{m}_{uv})$ を

$$m_{ij}=\begin{cases} a_j(T_i(\theta_p\varphi_p)) & (\chi_p(i)=-1) \\ 0 & (\chi_p(i)=1) \end{cases} \quad (1\le i,j\le r_p),$$

$$\widetilde{m}_{uv}=\begin{cases} a_v(T_u(\theta_p\varphi_p)) & (\chi_p(u)=-1) \\ 0 & (\chi_p(u)=1) \end{cases} \quad (1\le u\le r_p,\ 1\le v\le d_p)$$

と定める．このとき $\mathrm{rank}(M_p)=\dim_{\mathbb{Q}} V_p^-$ が成り立つ．従って，$\mathrm{rank}(M_p)=\dim_{\mathbb{C}} S_{k+1}^-(p,\chi_p)$ が成り立てば，$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Im}(\Phi^-)=\mathrm{rank}(\widetilde{M}_p)$ が成り立つ．以上をまとめると次のようになる；

**命題 13.3.3.** $\mathrm{rank}(M_p)=\dim_{\mathbb{C}} S_{k+1}^-(p,\chi_p)$ が成り立つとき，

$$s+2a=\dim_{\mathbb{C}} S_1^-(p,\chi_p)=\mathrm{rank}(M_p)-\mathrm{rank}(\widetilde{M}_p) \tag{13.16}$$

が成り立つ．

PARI/GP で行列の階数を計算するには “`matrank`” を使えばよい．ここで，$\mathrm{rank}(M_p)=\dim_{\mathbb{C}} S_{k+1}^-(p,\chi_p)$ が成り立つかどうかが問題であるが，筆者は $p\equiv 11 \pmod{12}$ のときは $p\le 6047$，$p\equiv 7 \pmod{12}$ のときは $p\le 2083$ まで $\mathrm{rank}(M_p)=\dim_{\mathbb{C}} S_{k+1}^-(p,\chi_p)$ が成り立つことを確認している（これら以外の $p$ についても散発的に確認している）．本稿の主題とは少し離れるが，次の問題が考えられる；

**問題 13.3.4.** $p$ を $p\equiv 3 \pmod 4), p\ge 7$ を満たす素数とし，$k, V_p^-$ をそれぞれ (13.6), (13.15) で定義されたものとする．このとき，

$$V_p^-\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}=S_{k+1}^-(p,\chi_p) \tag{13.17}$$

が成り立つであろうか？

さて，以上で方法で PARI/GP で計算した結果，$s+2a>0$ となる $p$ は下表の通りである；

| | $s+2a=1$ | $s+2a=2$ |
|---|---|---|
| $p\equiv 11 \pmod{12}$ ($p\le 6047$) | $491, 563, 1823, 1931, 2243,$ $2843, 2687, 3119, 3407, 4703$ | $3203, 5171$ |
| $p\equiv 7 \pmod{12}$ ($p\le 2083$) | $283, 331, 643, 751, 1399, 1423, 1879$ | $2083$ |

この範囲の素数 $p$ では $s+2a\ge 3$ となる例はない．$s+2a=1$ は $s=1$ かつ $a=0$ ということになり，$S_4$ 型のカスプ形式が存在することになる．$s+2a=2$ のときは，この式だけでは $s$ と $a$ の値を特定できないが，例えば

代数体のデータベースから，判別式 $p^2$ の虚な $A_5$ 拡大の有無がわかれば $s$ と $a$ の値がわかる．上記表の $p = 2083, 3203, 5171$ ではいずれも $s = 0$ かつ $a = 1$ である．また，実際に $q$ 展開を計算することによって $s$ と $a$ の値を特定することもできる．

以上の方法で，どのレベル $p$ で例外型の重さ 1 のモジュラー形式が存在するのかがわかる．次に，そのような例外型の形式の $q$ 展開を計算する方法を説明する．ここでは，PARI/GP のコマンド "`matker`" を利用する．これは，行列が定める線形写像の核の基底を与えるものである．

ここから，素数 $p \equiv 3 \pmod 4$ を $s + 2a > 0$ となるようなものとする．先に定義した行列 $\widetilde{M}_p$ の第 $i$ 行ベクトルを $\boldsymbol{v}_i$ で表すことにする．つまり，

$$\boldsymbol{v}_i = (a_1(T_i(\theta_p\varphi_p)), \ldots, a_{d_p}(T_i(\theta_p\varphi_p)))$$

である．$\widetilde{M}_p$ の転置行列に `matker` を適用して，

$$\sum_{i=1}^{r_p} b_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \tag{13.18}$$

となる有理数 $b_1, \ldots, b_{r_p}$ を見つける．もし，

$$g := \sum_{i=1}^{r_p} b_i T_i(\theta_p\varphi_p) \neq 0 \tag{13.19}$$

であれば，完全系列 (13.11) により $g/\varphi_p$ は例外型のモジュラー形式である．

例 13.3.5 ($S_4$ 型の例)．$S_4$ 型のモジュラー形式は，(13.19) のような $g$ を見つけて $g/\varphi_p$ を計算すれば，きれいな形の $q$ 展開が得られる．式 (13.19) の係数 $b_i$ は複雑な有理数となるので，ここでは記載を省略する．

- $p = 491$ のとき，(13.19) のようなある $g$ をとって $f_1 := g/\varphi_p$ とすると，$S_1^-(491, \chi_{491}) = \mathbb{C}f_1$ であり，$f_1$ の $q$ 展開は

$$\begin{aligned} f_1 = q - q^3 - q^4 + q^{11} + q^{12} - q^{13} - 2q^{14} - q^{16} - q^{17} - q^{25} + q^{27} \\ + q^{31} - q^{33} + q^{37} + 2q^{38} + q^{39} + q^{41} + 2q^{42} + q^{43} + \cdots \end{aligned}$$

のようになる．$f_1$ は Hecke 固有形式ではない．そこで，$f_2 := -T_2(f_1)/2 \in S_1^+(491, \chi_{491})$ を計算すると

$$\begin{aligned} f_2 = q^2 - q^6 + q^7 - q^{19} - q^{21} + q^{22} + q^{23} - q^{26} - q^{28} + q^{29} - q^{32} \\ - q^{34} - q^{50} + \cdots . \end{aligned}$$

となる．このとき，$f_1 \pm \sqrt{-2} f_2$ が $S_4$ 型の正規化された Hecke 固有形式となる．

- $p = 1399$ のとき，(13.19) のようなある $g$ をとって $f_1 := g/\varphi_p$ とすると，$S_1^-(1399, \chi_{1399}) = \mathbb{C}f_1$ であり，

$$
\begin{aligned}
f_1 = q &- q^2 - q^5 + q^8 - q^9 + q^{10} + q^{11} - q^{16} + q^{18} - q^{19} - q^{22} \\
&+ q^{29} - 2q^{37} + q^{38} - 2q^{39} - q^{40} + q^{41} + q^{45} - q^{49} - 2q^{51} \\
&- q^{55} - q^{58} + q^{64} - q^{72} - q^{73} + 2q^{74} + 2q^{78} + q^{79} + q^{80} \\
&- q^{81} - q^{82} - q^{83} + q^{88} - q^{89} - q^{90} + 2q^{93} + q^{95} + q^{98} \\
&- q^{99} + 2q^{102} + q^{110} + q^{125} - \cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2 &:= -T_3(f_1)/2 \in S_1^+(1399, \chi_{1399}) \\
&= q^3 - q^6 + q^{13} - q^{15} + q^{17} + q^{24} - q^{26} + q^{30} - q^{31} + q^{33} - q^{34} \\
&\quad + q^{43} - q^{48} - q^{53} - q^{57} + q^{62} - q^{65} - q^{66} - q^{85} - q^{86} + q^{87} \\
&\quad + q^{101} + q^{104} + q^{106} - q^{109} - 2q^{111} - q^{113} + q^{114} - q^{117} - \cdots.
\end{aligned}
$$

このとき，$f_1 \pm \sqrt{-2} f_2$ が $S_4$ 型の正規化された Hecke 固有形式となる．

例 13.3.6 ($A_5$ 型の例)．$p = 2083, 3203, 5171$ などで $A_5$ 型のモジュラー形式が存在するのであるが，その $q$ 展開を上記の方法で計算すると，$S_4$ 型のときとは様子が少し異なる．すなわち，(13.19) のような $g$ を見つけて $g/\varphi_p$ を計算すると，Fourier 係数に非常に複雑（ここに記載できないくらい）な有理数が現れる．$g/\varphi_p$ は確かに重さ 1 のカスプ形式なのであるが，Fourier 係数が複雑すぎて大変見づらいものである．Fourier 係数が整数となるものを見つけるために，(13.18) を満たす別の有理数 $b'_1, \ldots, b'_{r_p}$ で，

$$
g' := \sum_{i=1}^{r_p} b'_i T_i(\theta_p \varphi_p) \neq 0, \quad g \neq g' \tag{13.20}
$$

を満たすようなものを求める．このとき，$(g - g')/\varphi_p$ を適当に有理数倍すると Fourier 係数がすべて整数となるものが得られることがある．筆者は $p = 2083, 3203, 5171$ に対して計算を行ったが，すべてこの方法で整数係数の $q$ 展開を得ることができた．

- $p = 2083$ のとき，$f_1 := ((g - g')/\varphi_p)/$(先頭係数) とすると，

$$
\begin{aligned}
f_1 = q^3 &- q^7 - q^8 - q^{11} + q^{12} + q^{18} + q^{20} - q^{27} - q^{28} - q^{32} - q^{34} \\
&+ q^{39} - q^{42} - q^{45} - q^{50} + q^{51} + 2q^{63} - q^{66} + q^{67} + q^{71} + q^{72} \\
&+ q^{75} + q^{85} + q^{86} - q^{87} - q^{91} + q^{92} + q^{94} + q^{98} + q^{99} + q^{101} \\
&- q^{104} + q^{105} - q^{110} + q^{111} - q^{118} - q^{119} + q^{120} + q^{125} - 2q^{129} \\
&- 2q^{141} - q^{143} - 2q^{147} + q^{149} + q^{154} + q^{156} + q^{165} - 2q^{168} \\
&- q^{173} - q^{175} + \cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2 &:= -T_4(f_1) \in S_1^-(2083, \chi_{2083}) \\
&= q^2 - q^3 - q^5 + q^7 + q^{20} - q^{23} + q^{26} - q^{30} - q^{34} - q^{39} + q^{42} \\
&\quad + q^{44} - q^{50} - q^{58} - q^{63} - q^{65} + q^{70} - q^{72} + q^{74} + q^{85} \\
&\quad + q^{87} + q^{91} + q^{92} - q^{97} - q^{99} - q^{103} - q^{105} + q^{108} - q^{110} \\
&\quad - q^{111} - q^{118} + q^{122} + q^{128} + q^{129} + q^{136} - q^{138} + q^{141} \\
&\quad + q^{145} + q^{147} - q^{158} + q^{166} + q^{168} + q^{173} + \cdots .
\end{aligned}
$$

このとき，$S_1^-(2083, \chi_{2083}) = \mathbb{C}f_1 + \mathbb{C}f_2$ である．また，

$$
\begin{aligned}
f_3 &:= T_3(f_1) \in S_1^+(2083, \chi_{2083}) \\
&= q + q^4 + q^6 - 2q^9 + q^{13} - q^{14} - q^{15} + q^{17} + 3q^{21} - q^{22} + 2q^{24} \\
&\quad + q^{25} - q^{29} + 2q^{33} + q^{35} - q^{36} + q^{37} + q^{40} - 2q^{43} - 2q^{47} \\
&\quad - 2q^{49} + q^{52} - q^{54} + q^{55} - 2q^{56} + q^{59} - q^{60} + q^{61} - q^{64} \\
&\quad - q^{69} - 2q^{77} + q^{78} - q^{79} + q^{83} + 2q^{84} - q^{88} - q^{89} - q^{90} \\
&\quad + 2q^{96} + q^{102} + 2q^{109} - 2q^{113} - q^{116} - 2q^{117} + q^{126} - q^{127} \\
&\quad + q^{131} + q^{132} + q^{134} + q^{135} - q^{137} + q^{140} + q^{142} + q^{148} \\
&\quad + q^{150} - q^{153} - q^{157} + q^{160} + q^{161} - q^{163} - q^{167} + q^{170} \\
&\quad + q^{170} - q^{172} - q^{174} - \cdots ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4 &:= -T_2(f_1) \in S_1^+(2083, \chi_{2083}) \\
&= q^4 - q^9 - q^{10} + q^{17} + q^{21} - q^{22} + q^{24} + q^{25} + q^{33} + q^{40} - q^{43} \\
&\quad - q^{46} - q^{47} - q^{49} + q^{52} - q^{54} + q^{55} - q^{56} + q^{59} - q^{60} - q^{64} \\
&\quad - q^{68} - q^{77} + q^{84} - q^{89} - q^{90} + q^{96} - q^{100} + q^{102} + q^{109} - q^{113} \\
&\quad + q^{115} - q^{116} - q^{117} + q^{126} - q^{130} + q^{134} + q^{135} + q^{140} + q^{142} \\
&\quad + q^{148} + q^{150} - q^{157} + q^{160} - q^{167} + 2q^{170} + q^{184} - \cdots
\end{aligned}
$$

とすると，$A_5$ 型の正規化された Hecke 固有形式の一つが

$$
f_3 + i\frac{1+\sqrt{5}}{2}f_2 + if_1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}f_4
$$

で与えられる．

- $p = 3203$ のとき，$f_1 := ((g - g')/\varphi_p)/(\text{先頭係数})$ とすると，

$$
\begin{aligned}
f_1 &= q^3 - q^4 + q^9 - q^{12} - q^{14} + q^{25} - q^{30} - q^{36} + q^{38} + q^{40} - q^{42} \\
&\quad - q^{46} - q^{49} + q^{56} + q^{64} + q^{65} - q^{73} - q^{78} + q^{79} + q^{85} + q^{86} \\
&\quad + q^{87} - q^{89} - q^{90} + q^{94} + q^{102} + q^{104} - q^{105} + q^{106} - q^{108} \\
&\quad - q^{111} + 2q^{114} - q^{115} - q^{116} + q^{119} - q^{122} - 2q^{126} + q^{133} \\
&\quad - q^{138} + q^{140} - q^{142} - q^{147} + q^{148} - q^{152} - q^{155} + q^{160} - q^{161} \\
&\quad + q^{163} - q^{167} + q^{168} + q^{169} + q^{186} + q^{192} - q^{195} + q^{196} - q^{202} \\
&\quad + q^{211} - q^{214} - q^{219} + q^{221} + q^{224} - q^{226} - q^{234} + q^{237} - q^{248} \\
&\quad - q^{250} + 2q^{258} + q^{260} + q^{261} + q^{262} + q^{265} - q^{273} - \cdots ,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
f_2 := {} & T_3(f_1) \in S_1^-(3203, \chi_{3203}) \\
= {} & q + q^3 - q^4 + q^9 - q^{10} - 2q^{12} - 2q^{14} - q^{26} + q^{27} + q^{29} - q^{30} + q^{34} \\
& -q^{35} - 2q^{36} - q^{37} + 2q^{38} - 3q^{42} - q^{46} - q^{49} + q^{56} + q^{62} + q^{64} \\
& -q^{65} - q^{73} + q^{75} - q^{78} + q^{79} + 2q^{86} + q^{87} - q^{90} - q^{91} + 2q^{94} \\
& +q^{95} + q^{97} - q^{100} + 2q^{102} - q^{105} + q^{106} - q^{108} - q^{111} + 3q^{114} \\
& -q^{116} + q^{119} + q^{120} - q^{121} - q^{122} - 3q^{126} + 2q^{133} - q^{136} - 2q^{138} \\
& +q^{140} - q^{142} - q^{142} - 2q^{147} + q^{148} - q^{152} + q^{155} - q^{161} - q^{166} \\
& -q^{167} + 2q^{168} - q^{173} + q^{184} + q^{186} + 2q^{192} + 2q^{196} - q^{197} + q^{199} \\
& -2q^{202} + q^{211} - 2q^{214} + q^{215} + q^{217} - 2q^{219} + q^{224} + q^{225} - q^{226} \\
& -q^{229} - q^{234} + q^{235} + 2q^{237} - q^{243} + q^{247} - q^{250} + q^{251} + q^{255} \\
& -q^{256} + 3q^{258} + q^{261} + q^{262} - q^{263} - q^{267} + q^{269} - \cdots .
\end{aligned}$$

このとき，$S_1^-(3203, \chi_{3203}) = \mathbb{C}f_1 + \mathbb{C}f_2$ である．また，

$$\begin{aligned}
f_3 := {} & -T_2(f_1) \in S_1^+(3203, \chi_{3203}) \\
= {} & q^2 + 2q^6 + q^7 - q^8 + q^{15} - q^{17} + q^{18} - q^{19} - q^{20} + 2q^{21} + q^{23} - q^{24} \\
& -2q^{28} - q^{32} + q^{39} + q^{39} - q^{43} + q^{45} - q^{47} + q^{50} - q^{51} - q^{52} - q^{53} \\
& +q^{54} - 2q^{57} + q^{58} - q^{60} + q^{61} + 2q^{63} + q^{68} + q^{69} - q^{70} + q^{71} - q^{72} \\
& -q^{74} + 2q^{76} - 3q^{84} - q^{92} - q^{93} - q^{96} - 2q^{98} + q^{101} + q^{107} + q^{113} \\
& +q^{117} + q^{124} + q^{125} + q^{128} - 2q^{129} - q^{131} - 2q^{141} - 2q^{146} - q^{149} \\
& +q^{150} - q^{153} - q^{156} - q^{157} + 2q^{158} - q^{159} + q^{170} - 2q^{171} + 2q^{172} \\
& +2q^{174} + q^{175} - q^{178} - q^{180} - q^{182} + q^{183} + 2q^{188} + q^{189} + q^{190} \\
& +q^{194} + q^{203} + 2q^{204} + q^{207} - 2q^{210} + q^{212} + q^{213} - q^{216} - 2q^{222} \\
& -q^{223} + q^{227} + 3q^{228} - q^{230} - q^{232} + q^{233} + 2q^{238} - q^{241} - q^{242} \\
& -q^{244} - q^{245} + q^{249} - 3q^{252} - q^{259} + 3q^{266} + \cdots ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 := {} & T_5(f_1) \in S_1^+(3203, \chi_{3203}) \\
= {} & q^5 - q^6 + q^8 + q^{13} - q^{15} + q^{17} - q^{18} + q^{20} - q^{21} - q^{23} + q^{28} \\
& -q^{31} + q^{32} - q^{39} - q^{45} - 2^{50} + q^{52} + q^{53} + q^{57} - q^{61} - q^{63} \\
& -q^{71} - q^{76} + q^{83} + q^{84} + q^{93} + q^{98} - q^{113} - q^{117} - q^{124} - q^{125} \\
& +q^{129} - q^{130} + q^{131} + q^{135} + q^{141} + q^{145} + q^{146} + q^{149} + q^{151} \\
& -q^{158} - q^{170} + q^{171} - q^{172} - q^{174} - q^{175} + q^{178} - q^{185} - q^{188} \\
& -q^{193} - q^{200} - q^{204} + q^{210} + q^{216} + q^{222} - q^{227} - q^{228} + q^{230} \\
& +q^{232} - q^{233} - q^{238} + q^{239} + q^{241} + q^{245} - q^{249} + q^{252} + q^{257} \\
& -q^{266} + \cdots
\end{aligned}$$

とおくと，$A_5$ 型の正規化された Hecke 固有形式の一つが

$$f_2 + i\frac{1+\sqrt{5}}{2}f_3 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}f_1 + i\frac{-1+\sqrt{5}}{2}f_4$$

で与えられる．

## 13.4　有限体上での計算例

$N, k$ を正の整数とする．Katz は [7] において，$\mathbb{Z}[1/N]$-代数 $R$ に対して $R$ 上のモジュラー形式（Katz モジュラー形式と呼ばれる）を定義した．重さ $k$，レベル $N$ の $R$ 上のモジュラー形式の空間，およびカスプ形式の空間をそれぞれ $M_k(N,R), S_k(N,R)$ で表す．指標 $\chi$ 付の空間は，$M_k(N,\chi,R), S_k(N,\chi,R)$ で表す．$M_k(N,R)$ の元 $f$ はカスプ $\infty$ での $q$ 展開をもち，それは $\mathbb{Z}[[q]]\otimes_{\mathbb{Z}} R$ に含まれる．Katz モジュラー形式の詳細な定義と性質については [7] を参照されたい．

$\ell$ を $N$ と素な素数とし，$R=\mathbb{F}_\ell$ の場合を考える．$q$ 展開係数を mod $\ell$ に還元することにより得られる自然な写像

$$S_k(N,\mathbb{Z}[1/N]) \to S_k(N,\mathbb{F}_\ell)$$

は $k \geq 2$ であれば全射である（cf. [8]）．また

$$S_k(\Gamma_1(N)) \cap \mathbb{Z}[1/N][[q]] = S_k(N,\mathbb{Z}[1/N])$$

が成り立つ（cf. [4]）．従って $k \geq 2$ のときは，$S_k(N,\mathbb{F}_\ell)$ の元はある $S_k(\Gamma_1(N))$ の元の Fourier 係数を mod $\ell$ に還元することによって得られる．

一方，$k=1$ のときは写像 (13.4) は必ずしも全射とはならない．より正確には，レベル $N$ を固定したとき，有限個の素数 $\ell$ に対して写像 (13.4) の全射性が崩れる可能性がある．実際に全射でないような例は Mestre によって最初に発見され，それは $(N,\ell)=(1429,2)$ であった（cf. [5]）．

mod $\ell$ 還元写像 $S_1(N,\mathbb{Z}[1/N]) \to S_1(N,\mathbb{F}_\ell)$ が全射でないとき，空間 $S_1(N,\mathbb{F}_\ell)$ には $\mathbb{C}$ 上のモジュラー形式に持ち上がらない元が存在する．このような元を [1] に倣って “**unliftable form**”（または unliftable mod $\ell$ form）と呼ぶことにする．unliftable form は Mestre の例 $(N,\ell)=(1429,2)$ においても存在し，その Fourier 係数のいくつかが [5] に見出される．Buzzard は [1] において，$(N,\ell)=(82,199)$ のときに unliftable form を発見し，その $q$ 展開を与えている．さらに，この unliftable form に対応して，$\mathbb{Q}$ 上 82 の外不分岐な $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{199})$-拡大の存在を示している．この Buzzard の例は $\ell$ が奇数であるような最初の例であった．

その後，Schaeffer は学位論文 [10] において Buzzard の計算手法を精密化し，unliftable form が存在するような組 $(N,\ell)$ の探索を効率化した．彼はその手法を Hecke stability method と呼んでいる．

Schaeffer の手法は複雑な条件が付いているものの，汎用性の高い非常に優れたものである．その詳細については [9] または [10] を参照されたい．本稿で

は，13.3 節の手法を unliftable form の探索と $q$ 展開の計算に応用できることを紹介する．

以下，$p$ を $p \equiv 3 \pmod 4$, $p \geq 7$ を満たす素数とし，

$$k, \chi_p, d_p, \varphi_p, V^-_{p,\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}, M_p, \widetilde{M}_p$$

は 13.3 節で定義されたものとする．また，$\ell$ を $p$ と異なる素数とする．

まず，次の系列が完全であることに注意する；

$$0 \longrightarrow S_1^-(p, \chi_p, \mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}]) \xrightarrow{\times \varphi_p} S^-_{k+1}(p, \chi_p, \mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}]) \xrightarrow{\Phi^-} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}](d_p). \tag{13.21}$$

これは，$\varphi_p$ の $q$ 展開の先頭係数が 1 なので，$1/\varphi_p \in \mathbb{Z}[[q]]$ となることから従う．簡単のため，$S_1^-(p, \chi_p, \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) = 0$ の場合を考える（このような素数 $p$ はたくさん存在する）．このとき，上段が完全な可換図式

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & S^-_{k+1}(p, \chi_p, \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) & \xrightarrow{\Phi^-} & \mathbb{Z}[\frac{1}{p}](d_p) \\ & {\scriptstyle \bmod \ell}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bmod \ell} \\ & S^-_{k+1}(p, \chi_p, \mathbb{F}_\ell) & \xrightarrow{\Phi^-_\ell} & \mathbb{F}_\ell(d_p) \end{array} \tag{13.22}$$

を得る．ここで，$\Phi^-_\ell$ は $q$ 展開を $d_p$ 番目の項までで打切る写像である．また，左の縦の写像 $S^-_{k+1}(p, \chi_p, \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) \to S^-_{k+1}(p, \chi_p, \mathbb{F}_\ell)$ は全射である．もし $\mathrm{Ker}(\Phi^-_\ell) \neq 0$ であれば，$g \in \mathrm{Ker}(\Phi^-_\ell), g \neq 0$ をとると，$g/\varphi_p$ が $S_1^-(p, \chi_p, \mathbb{F}_\ell)$ に属する unliftable form であると推測される[*2]．この計算を実行するために，13.3 節で導入した加群 $V^-_{p,\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}$ および行列 $M_p, \widetilde{M}_p$ を利用して，$S^-_{k+1}(p, \chi_p, \mathbb{F}_\ell)$ の基底を求める．$M_{p,\ell}, \widetilde{M}_{p,\ell}$ をそれぞれ $M_p, \widetilde{M}_p$ の各成分を mod $\ell$ に還元して得られる行列とする．写像 $S^-_{k+1}(p, \chi_p, \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) \to S^-_{k+1}(p, \chi_p, \mathbb{F}_\ell)$ が全射であるから，$\mathrm{rank}(M_{p,\ell}) = \dim_{\mathbb{C}} S^-_{k+1}(p, \chi_p)$ であれば $\dim_{\mathbb{F}_\ell} S^-_{k+1}(p, \chi_p, \mathbb{F}_\ell) = \mathrm{rank}(M_{p,\ell})$ となり，行列 $M_{p,\ell}$ によって空間 $S^-_{k+1}(p, \chi_p, \mathbb{F}_\ell)$ の基底の $q$ 展開が（Sturm bound まで）求まったことになる．このとき，$\mathrm{rank}(M_{p,\ell}) - \mathrm{rank}(\widetilde{M}_{p,\ell}) > 0$ ならば $\mathrm{Ker}(\Phi^-_\ell) \neq 0$ が成り立つ．$\mathrm{Ker}(\Phi^-_\ell)$ の 0 でない元は，$\widetilde{M}_{p,\ell}$ に `matker` を適用して見つけることができる．

例 13.4.1. $p = 2267 \equiv 11 \pmod{12}, \ell = 13$ のとき，レベル 2267 の unliftable mod 13 form が存在する．実際，PARI/GP による計算で

- $S_1^-(2267, \chi_{2267}) = 0$,
- $\mathrm{rank}(M_{2267}) = \mathrm{rank}(M_{2267,13}) = \dim_{\mathbb{C}} S_3^-(2267, \chi_{2267})$,
- $\mathrm{rank}(M_{2267,13}) - \mathrm{rank}(\widetilde{M}_{2267,13}) = 1$

---

[*2] $\varphi_p$ を $S_k(p, \mathbb{F}_\ell)$ の元とみなしたとき，$\varphi_p$ がカスプ以外に零点をもつのか否かが問題である．

が成り立つ．さらに，$g \in \mathrm{Ker}(\Phi_{13}^-), g \neq 0$ で $F := g/\varphi_p$ の $q$ 展開が

$$\begin{aligned}F = q &+ 11q^2 + 11q^3 + 8q^4 + 3q^5 + 4q^6 + 3q^7 + 8q^8 + 3q^9 + 9q^{10} \\ &+8q^{11} + 10q^{12} + q^{13} + 7q^{14} + 7q^{15} + 6q^{16} + 10q^{17} + 7q^{18} \\ &+7q^{19} + 11q^{20} + 7q^{21} + 11q^{22} + 11q^{23} + 10q^{24} + 7q^{25} + 3q^{26} \\ &+9q^{27} + 11q^{28} + 6q^{29} + 8q^{30} + 7q^{31} + 9q^{32} + \cdots \in \mathbb{F}_{13}[[q]]\end{aligned}$$

となるものが存在する．$F$ が $S_1^-(2267, \chi_{2267}, \mathbb{F}_{13})$ に属していることを確かめるためには，$F^3$ が $S_3^-(2267, \chi_{2267}, \mathbb{F}_{13})$ に属していることを示せばよい．$V_{p,\mathbb{Z}[1/2267]}^-$ の元の mod 13 への還元により $S_3^-(2267, \chi_{2267}, \mathbb{F}_{13})$ の基底が得られているから，その線形結合として $F^3$ が表されることを示せばよく，PARI/GP による計算で実際に示すことができる．その結果 $F \in S_1^-(2267, \chi_{2267}, \mathbb{F}_{13})$ であることがわかる．

また，$T_2$ の作用を調べることにより，$F$ は Hecke 固有形式ではないことがわかる．そこで，$G := (F - T_2(F)/11)/8$, $H := F - 11G$ とする．$G$ と $H$ の $q$ 展開はそれぞれ

$$\begin{aligned}G = q^2 &+ 5q^5 + 11q^6 + 9q^8 + 9q^{11} + 6q^{13} + 3q^{14} + 3q^{15} \\ &+8q^{17} + 3q^{18} + 3q^{19} + q^{20} + q^{23} + 8q^{24} + 3q^{31} + \cdots \in \mathbb{F}_{13}[[q]],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H = q &+ 11q^3 + 8q^4 + 3q^7 + 3q^9 + 10q^{12} + 6q^{16} + 7q^{21} + 11q^{22} \\ &7q^{25} + 3q^{26} + 9q^{27} + 11q^{28} + 6q^{29} + 8q^{30} + 4q^{34} + \cdots \in \mathbb{F}_{13}[[q]]\end{aligned}$$

となる．$\alpha \in \mathbb{F}_{13^2}$ を $\alpha^2 = 7$ を満たすものとして，$f := H + \alpha G$ とおく．このとき，$f$ の $q$ 展開は

$$\begin{aligned}f = q &+ \alpha q^2 + 11q^3 + 8q^4 + 5\alpha q^5 + 11\alpha q^6 + 3q^7 + 9\alpha q^8 + 3q^9 + 9q^{10} \\ &+9\alpha q^{11} + 10q^{12} + 6\alpha q^{13} + 3\alpha q^{14} + 3\alpha q^{15} + 6q^{16} + 8\alpha q^{17} + 3\alpha q^{18} \\ &+3\alpha q^{19} + \alpha q^{20} + 7q^{21} + 11q^{22} + \alpha q^{23} + 8\alpha q^{24} + 7q^{25} + 3q^{26} + 9q^{27} \\ &+11q^{28} + 6q^{29} + 8q^{30} + 3\alpha q^{31} + 2\alpha q^{32} + 8\alpha q^{33} + \cdots \in \mathbb{F}_{13^2}[[q]]\end{aligned}$$

という形となり，Fourier 係数の乗法性や素数べきにおける漸化式が成り立っていることが見て取れる．やや細かい議論が必要になるが，計算機を用いれば（筆者は PARI/GP を使った）$f$ は実際に Hecke 固有形式であることを示すことができる．その結果，$f$ に付随する mod 13 Galois 表現 $\rho_{f,13} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{13^2})$ が存在することがわかる．Coleman–Voloch [3] により，$\rho_{f,13}$ は 2267 の外不分岐（従って 13 で不分岐）である．$f$ の Fourier 係数を調べると，$\mathrm{Im}(\rho_{f,13})$ の射影線形群 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{13^2})$ への像は $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{13})$ に同型であるように思われる（2018 年 1 月 31 日時点では未証明）．これは，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{13})$ または $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{13^2})$ に同型な Galois 群をもつ $\mathbb{Q}$ 上 2267 の外不分岐な代数体の存在を示唆しているものである．いくつかの代数体のデータベー

スを確認したところ，現時点ではこのような体は掲載されていないようである（cf. [6, 14, 15]）.

## 謝辞

サマースクールを企画・運営してくださった主催者の木村巌氏，横山俊一氏に感謝申し上げます．併せて，講演の機会をいただいたことに厚くお礼申し上げます.

# 参考文献

[1] K. Buzzard, Computing weight one modular forms over $\mathbb{C}$ and $\overline{\mathbb{F}}_p$. Computations with modular forms, 129–146, Contrib. Math. Comput. Sci., 6, Springer, Cham, 2014.

[2] K. Buzzard, A. Lauder, A computation of modular forms of weight one and small level. Ann. Math. Que. **41** (2017), no. 2, 213–219. Website: http://people.maths.ox.ac.uk/lauder/weight1

[3] R. Coleman, J. F. Voloch, Companion forms and Kodaira-Spencer theory. Invent. Math. **110** (1992), no. 2, 263–281.

[4] F. Diamond, J. Im, "Modular forms and modular curves" in *Seminar on Fermat's Last Theorem*, CMS Conf. Proc. **17**, pp. 39–133, Amer. Math. Soc., Province, RI, 1995.

[5] B. Edixhoven, Comparison of integral structures on spaces of modular forms of weight two, and computation of spaces of forms mod 2 of weight one. With appendix A (in French) by Jean-Francois Mestre and appendix B by Gabor Wiese. J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), no. 1, 1–34.

[6] J. W. Jones, D. P. Roberts, A database of number fields. LMS J. Comput. Math. **17** (2014), no. 1, 595–618. Website: http://hobbes.la.asu.edu/NFDB/

[7] N. Katz, "$p$-adic properties of modular schemes and modular forms" in *Modular functions of one variable, III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, pp. 69–190. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 350, Springer, Berlin, 1973.

[8] C. Khare, Modularity of Galois representations and motives with good reduction properties. J. Ramanujan Math. Soc. **22** (2007), no. 1, 75–100.

[9] G. Schaeffer, Hecke stability and weight 1 modular forms. Math. Z. **281** (2015), no. 1-2, 159–191.

[10] G. Schaeffer, The Hecke stability methods and ethereal forms. Ph.D

Thesis, University of California, Berkeley (2012).

[11] J. P. Serre, Modular forms of weight one and Galois representations. A. Fröhlich ed. Algebraic Number Fields (1977), 193–268.

[12] G. Shimura, On elliptic curves with complex multiplication as factors of the Jacobians of modular function fields. Nagoya Math. J. **43** (1971), 199–208.

[13] 小澤友美，重さ 1 の楕円尖点形式に伴う Artin 表現，本報告集.

[14] A Database for Number Fields.
Website: http://galoisdb.math.upb.de/

[15] LMFDB.
Website: http://www.lmfdb.org/