11.

Hilbert モジュラー形式の計算

高井 勇輝[*1]（理研 AIP/慶應義塾大学）

11.1 Introduction

本報告集において, モジュラー形式に関しては一変数のもの, つまり楕円モジュラー形式に限定して計算理論などについて触れられてきた. 本稿では総実化を意識した多変数拡張である Hilbert モジュラー形式の計算理論について概説する.

簡単に Hilbert モジュラー形式の定義を復習する. F を総実体, $[F:\mathbb{Q}]=n$, $v_1,\dots,v_n : F\hookrightarrow\mathbb{R}$ を埋め込みとする. $\mathrm{GL}_2(F)$ の部分群 $\mathrm{GL}_2^+(F)$ を

$$\mathrm{GL}_2^+(F) := \{x\in\mathrm{GL}_2(F) \mid v_i(\det x)>0 \text{ for all } i\}$$

と定義する. このとき, この v_i を $\mathrm{GL}_2(F)\hookrightarrow\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に拡張したものを用いて,

$$\mathrm{GL}_2^+(F)\hookrightarrow\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^n \curvearrowright \mathcal{H}^n$$

で, $\mathcal{H}^n$ に $\mathrm{GL}_2^+(F)$ は作用する. ここで, $\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \Im z>0\}$ は上半平面. $\mathbb{Z}_F$ を F の整数環, $\mathfrak{N}$ を $\mathbb{Z}_F$ の零でないイデアルとする. 今回は, 次の合同部分群に限定して記述する：

$$\Gamma_0(\mathfrak{N}) = \left\{\gamma\in\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Z}_F) \;\middle|\; \gamma\equiv\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mod \mathfrak{N}\right\}.$$

$\underline{k}=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ とする. 正則関数 $f\colon\mathcal{H}^n\to\mathbb{C}$ がウエイト $\underline{k}$, レベル $\Gamma_0(\mathfrak{N})$ の Hilbert モジュラー形式であるとは, 次の条件を満たすときをいう：

[*1] Partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Young Scientists (B) (15K17518).

1. 任意の $\gamma \in \Gamma_0(\mathfrak{N})$ に対して, $\gamma_i := v_i(\gamma)$ とおくと,

$$f(\gamma z) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{j(\gamma_i, z_i)}{(\det \gamma_i)^{1/2}} \right)^{k_i} f(z)$$

2. $F = \mathbb{Q}$ のとき, カスプで正則.

Hilbert モジュラー形式がカスプ形式であるとは, 任意のカスプで零であるときをいう. ウエイト $\underline{k}$, レベル $\Gamma_0(\mathfrak{N})$ の Hilbert モジュラー形式（resp. カスプ形式）のなす空間を $M_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$（resp.$S_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$）と書く.

数式処理システム Magma では Hilbert モジュラー形式に関して次元や $S_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ の基底などを計算するコマンドが実装されている. 具体的にどのようなコマンドが実装されているか, や実行例などは Magma の提供しているページ
`https://magma.maths.usyd.edu.au/magma/handbook/hilbert_modular_forms`
を参照すると詳しく書かれている. また, Magma 自体の扱い方については, [木原横] を参考にするとよい.

本稿では, Hilbert モジュラー形式に作用する Hecke 作用の計算に注目する. Hecke 作用素は Hilbert モジュラー形式に対しても, 一変数モジュラー形式のときと同様に定義され, その同時固有形式は L-関数を介して総実体上のアーベル多様体などと関連付くなど, 数論的にも重要な研究対象である. 実際, 後に紹介する Dembélé らによる definite method による Hecke 作用の計算の応用として, Hilbert モジュラー形式に付随するアーベル多様体の構成に関する問題で, Shimura 曲線を経由できないケース（例えば, $[F : \mathbb{Q}]$ が偶数でレベルが square-full のとき）での evidence を与えることに成功している.

しかし, 具体的に Hecke 作用を計算するにしても, 楕円モジュラー形式に対して有効だった方法を安直に拡張しようとしても, あまりうまくいかない. 例えば, 一変数のモジュラー形式の計算で使われた, モジュラーシンボルを使う方法の拡張を考えると, Hilbert モジュラー形式が定義される多様体, Hilbert モジュラー多様体 $X_0(\mathfrak{N})$ は n 次元多様体であり, そのコホモロジー上への Hecke 作用の計算は容易ではない. ゆえに, この状況で通用する別のアイディアが必要になる.

本稿では実際に Magma での実装に使われている次の方法に的を絞る.

- Indefinite method (主に n が奇数) $\cdots$ Greenberg-Voight [GV11], Voight [Voi10]
- Definite method (主に n が偶数) $\cdots$ Dembélé [Dem05], [Dem07], Dembélé-Donnelly [DD08]

Hilbert モジュラー形式の計算理論に関しては, 他にも Okada [O$^+$02], Gannells-Yasaki [GY08], Socrates-Whitehouse [SW05] らによっても知られていることに注意しておく. Dembélé, Donnelly, Greenberg, Voight の結果を組み合わせることで次のことが示される：

定理 11.1.1 (Dembélé, Donnelly, Greenberg, Voight). $\underline{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 2}$ の各 k_i の偶奇は一致しているとする. このとき, Hilbert モジュラーカスプ形式の空間 $S_{\underline{k}}(\mathfrak{N})$ 上の Hecke 作用を計算する, ある明示的なアルゴリズムが存在する.

Theorem 1.1 におけるアイデアは共に Jacquet-Langlands 対応を使って, 低次元の多様体（0 次元, または 1 次元）での計算に帰着することである. 次節以降で, 四元数環上の乗法群に対するモジュラー形式（四元数モジュラー形式, quaternionic modular form）の定義から始め, Jacquet-Langlands 対応を介することでいかに計算可能な状況に帰着していくかについて解説する. 無駄に記号が増えて, アイデアが伝わりづらくなることを避けるために, 本稿（特に §.3）ではウエイトを parallel ウエイト $(2, \dots, 2)$ で F の狭義類数が 1 として解説する. より詳しく知りたい方は, 一般の類数に対する計算手法や計算例などを含めた解説 Dembélé-Voight [DV13] を参照されたい. また, 数論系のデータベース LMFDB での Hilbert モジュラー形式に関するデータベース化に関するプロジェクトも進行しており, Donnelly-Voight [DV16] で紹介されている.

このような貴重な講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの皆様, 及び議論にお付き合い下さいました講演者や参加者の皆様に深く感謝いたします.

11.2 四元数モジュラー形式, Jacquet-Langlands 対応

簡単のため, ウエイト $\underline{k}$ が $(2, \dots, 2)$ の仮定の下で, 四元数モジュラー形式の定義とそれへの Hecke 作用の定義を行い, その特別な場合として Hilbert モジュラー形式の定義が導出されることを総実代数体 F の狭義類数が 1 の場合で確認する. また, 次節での計算理論のために必要な Jacquet-Langlands 対応のステートメントも紹介する. より一般のウエイトに対する定義は Dembélé-Voight [DV13] の §.7 を参照されたい.

四元数環について少し復習しておく. 四元数環についての, より詳しい内容については [Vig], [Voi14] などが参考になる. 数体 F 上の四元数環 B とは,

F 上の 4 次元中心的単純環のことである．これは, F-上のベクトル空間として, $B = F + Fi + Fi + Fij$, $i^2, j^2 \in F^\times$, $ij = -ji$ を満たす基底 $\{1, i, j, ij\}$ で表せることと同値である．

例 11.2.1. ・二次行列環：$B = \mathrm{M}_2(F)$.
・F 上の Hamilton 四元数環：$B = \mathbb{H}_F = F + Fi + Fj + Fij$, $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji$.

F 上の B が F の素点 v で分解する, または不分岐であるとは $B \otimes_F F_v \simeq M_2(F_v)$ となることと定義する．ここで, F_v は F の v での完備化を表す．また, B が v で分解しないとき, v で分岐するという．F 上の任意の四元数環は有限個の素点でのみ分岐し, 分岐する素点の個数は偶数個である．B が分岐する有限素点に対応する素イデアルの積で定義される square-free なイデアル $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(B)$ を B の判別式という．また, 任意の F の偶数個の素点に対して, それらでのみ分岐する四元数環は同型を除いてただ一つ存在する．

以下, F は有限次総実体とし, $n = [F : \mathbb{Q}]$ とおく．$v_1, \ldots, v_n : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ を F の実埋め込みとし, 実素点と同一視する．F の整数環を $\mathbb{Z}_F$ とおく．F 上の四元数環 B が $v_1, \ldots, v_r$ で split, $v_{r+1}, \ldots, v_n$ で分岐するとし, B の判別式を $\mathfrak{D}$ とおく．$r = 0$ のとき, 即ち, 任意の v_i で分岐するとき, B は totally definite といい, そうでないとき indefinite であるという．$\mathcal{O}_0(1) \subset B$ をある maximal order とし, 任意の有限素点 $\mathfrak{p}$ で $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{D}$ であるものに対して, 同型 $\mathcal{O}_0(1) \otimes \mathbb{Z}_{F_\mathfrak{p}} \simeq M_2(\mathbb{Z}_{F_\mathfrak{p}})$ を固定し, その固定した同型と自然な単射 $\mathcal{O}_0(1) \hookrightarrow \mathcal{O}_0(1) \otimes \mathbb{Z}_{F_\mathfrak{p}}$ との合成を $i_\mathfrak{p}$ とおく．判別式 $\mathfrak{D}$ と互いに素なイデアル $\mathfrak{N} \subset \mathcal{O}_F$ を に対して $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0(\mathfrak{N}) \subset \mathcal{O}_0(1)$ を次で定義されるレベル $\mathfrak{N}$ の Eichler order とする：

$$\mathcal{O}_0(\mathfrak{N}) = \left\{ u \in \mathcal{O}_0(1) \;\middle|\; i_\mathfrak{p}(u) \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mod \mathfrak{p}^{\mathrm{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{N})} \text{ for all } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{N} \right\}$$

である．$B_\infty^\times = (B \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R})^\times \simeq \prod_{i=1}^n B \otimes_F F_{v_i} \simeq GL_2(\mathbb{R})^r \times (\mathbb{H}_\mathbb{R}^\times)^{n-r}$ の部分群 K_∞ を

$$K_\infty := (\mathbb{R}^\times SO_2(\mathbb{R}))^r \times (\mathbb{H}_\mathbb{R}^\times)^{n-r} \subset B_\infty^\times = (B \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R})^\times$$

とおく．ここで $\mathbb{H}_\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上の Hamilton の四元数環を表す．$B_\infty^\times$ の $(\mathcal{H}^\pm)^r = (\mathbb{C} \backslash \mathbb{R})^r$ への作用を $i = 1, \ldots, r$ に対する各 v_i 成分ごとの $\mathcal{H}^\pm$ への一次分数変換として定義すると, $B_\infty^\times$ の作用は free であり, K_∞ が $(\sqrt{-1}, \ldots, \sqrt{-1})$ の stabilizer であることから, 次の同一視ができる：

$$B_\infty^\times / K_\infty \to (\mathcal{H}^\pm)^r : g \mapsto z = g(\sqrt{-1}, \ldots, \sqrt{-1}).$$

任意の $\mathbb{Z}$-加群 M に対して $\widehat{M} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{Z}$ とおく. ここで, $\widehat{Z} = \prod_{p\colon \text{prime}} \mathbb{Z}_p$ である. $B_\infty^\times \times \widehat{B}^\times$ 上の関数 $\phi\colon B_\infty^\times \times \widehat{B}^\times \to \mathbb{C}$ への $K_\infty \times \widehat{B}^\times$ の右作用を

$$(\phi|(\kappa, \widehat{\beta}))(g, \widehat{\alpha}) := \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{j(\kappa_j, \sqrt{-1})^2}{\det \kappa_i}\right) \phi(g\kappa^{-1}, \widehat{\alpha}\widehat{\beta}^{-1})$$

で定義する. ここで, $v_i(\kappa) = \kappa_i$ であり, $\kappa_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ としたとき, $j(\kappa_i, \sqrt{-1}) = c_i\sqrt{-1}+d_i$ である. 今は, $\kappa_i \in K_\infty$ なので, $\kappa_i, \kappa_i' \in \mathbb{R}^\times SO_2(\mathbb{R})$ に対して $j(\kappa_i, \sqrt{-1}) j(\kappa_i', \sqrt{-1}) = j(\kappa_i\kappa_i', \sqrt{-1})$ となることに注意.

定義 11.2.2. B に対するウエイト $(2, \ldots, 2)$, レベル $\mathfrak{N}$ の四元数モジュラー形式とは, 解析的な関数 $\phi\colon B_\infty^\times \times \widehat{B}^\times \to \mathbb{C}$ で, 任意の $(g, \widehat{\alpha}) \in B_\infty^\times \times \widehat{B}^\times$ に対して次が成り立つもののことと定義する：

1. $(\phi|(\kappa, \widehat{u}))(g, \widehat{\alpha}) = \phi(g, \widehat{\alpha})$ for all $(\kappa, \widehat{u}) \in K_\infty \times \widehat{\mathcal{O}}^\times$
2. $\phi(\gamma g, \gamma\widehat{\alpha}) = \phi(g, \widehat{\alpha})$ for all $\gamma \in B^\times$.
3. （$F = \mathbb{Q}, B = \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ のとき）任意のカスプで正則.

B に対するウエイト $(2, \ldots, 2)$, レベル $\mathfrak{N}$ の四元数モジュラー形式のなす空間を $M_2^B(\mathfrak{N})$ と書く. この定義を言い換えて, より古典的な形に近い定義を導出する. $\phi \in M_2^B(\mathfrak{N})$ とする. $(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) \in \mathcal{H}^r \times \widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times$ に対し, $g(\sqrt{-1}, \ldots, \sqrt{-1}) = z = (z_1, \ldots, z_r)$ となる $g \in B_\infty^\times$ を一つ選ぶ. このとき, 関数 $f\colon \mathcal{H}^r \times \widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times \to \mathbb{C}$ を

$$f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{j(g_i, \sqrt{-1})^2}{\det g_i}\right) \phi(g, \widehat{\alpha})$$

で定義する. また, $B_+^\times$ の元 γ の f への作用を

$$(f|\gamma)(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{\det \gamma_i}{j(\gamma_i, z_i)^2}\right) f(\gamma z, \gamma\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)$$

で定義すると, $f|\gamma = f$ となる. ここで, $\gamma_i = v_i(\gamma) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$. このとき, $\phi \in M_2^B(\mathfrak{N})$ であることと $f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)$ が z について正則で, $\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times$ に関して locally constant であり, $f|\gamma = f$ を満たすことが同値である. （$B = \mathrm{M}_2(\mathbb{Q})$ のときはカスプでの正則性も必要.）

注意 11.2.3. $B^\times$ に対する志村多様体 $X_0^B(\mathfrak{N})$ を次で定義する：

$$X_0^B(\mathfrak{N})(\mathbb{C}) := B^\times \backslash B_\infty^\times \times \widehat{B}^\times / K_\infty \times \widehat{\mathcal{O}}^\times \simeq B^\times \backslash ((\mathcal{H}^\pm)^r \times \widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times)$$

このとき, $X_0^B(\mathfrak{N})(\mathbb{C})$ は r 次元の複素多様体になる.

$B^\times$ の reduced norm による像 $\mathrm{nrd}\, B^\times$ は

$$\mathrm{nrd}\, B^\times = F_{(+)}^\times = \{x \in F^\times \mid v_i(x) > 0 \text{ for } i = r+1, \ldots n\} \subset F_+^\times$$

となる．ここで, $B = F + Fi + Fj + Fij \quad (i^2, j^2 \in F^\times, ji = -ij)$ と表示されるとき, $x = a + bi + cj + dij \in B$ の reduced norm $\mathrm{nrd}\, x$ は

$$\mathrm{nrd}\, x = a^2 - b^2i^2 - c^2j^2 + d^2i^2j^2 \in F$$

で定義される．よって,

$$B_+^\times = \{x \in B^\times \mid \mathrm{nrd}\,(x)\colon \text{totally positive}\}$$

とおくと $B^\times/B_+^\times \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ となることに注意すると,

$$X_0^B(\mathfrak{N})(\mathbb{C}) \simeq B^\times \backslash ((\mathcal{H}^\pm)^r \times \widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times) \simeq B_+^\times \backslash (\mathcal{H}^r \times \widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times)$$

となる．

次に Hecke 作用を定義する．$\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}_F$ を素イデアルとする．$\widehat{p} \in \widehat{\mathbb{Z}}_F$ を $\widehat{p}\widehat{\mathbb{Z}}_F \cap \mathbb{Z}_F = \mathfrak{p}$ となるものとし,

$$\widehat{\pi}_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widehat{p} \end{pmatrix} \in \widehat{\mathcal{O}}^\times$$

と定義する．この $\widehat{\pi}_0$ に対して

$$\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi}_0 \widehat{\mathcal{O}}^\times = \bigsqcup_i \widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi}_i$$

と分解される．このとき, Hecke 作用 $T_\mathfrak{p} f$ を

$$(T_\mathfrak{p} f)(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) := \sum_i f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\pi}_i^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times)$$

で定義する．これは, 集合 $\Theta(\mathfrak{p})$ を

$$\Theta(\mathfrak{p}) := \widehat{\mathcal{O}}^\times \backslash \{\widehat{\pi} \in \widehat{\mathcal{O}} \mid \mathrm{nrd}\,(\widehat{\pi}) = \widehat{p}\}$$

としたときの

$$(T_\mathfrak{p} f)(z, \widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times) = \sum_{\widehat{\pi} \in \Theta(\pi)} f(z, \widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times)$$

とも言いかえられる．

四元数環 B が $\mathrm{M}_2(F)$ のときの四元数モジュラー形式が Hilbert モジュラー形式のよく知られている定義と整合していることを, 狭義類数が 1 と仮定して書き下し確認しておく．

$B = \mathrm{M}_2(F)$ のとき, B は任意の素点で分解している．特に $r = n$ である．また, B が indefinite の場合, reduced norm により誘導される写像

$$\mathrm{nrd} : B_+^\times \backslash \widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times \to F_+^\times \backslash \widehat{F}^\times/\widehat{\mathbb{Z}}_F^\times \simeq \mathrm{Cl}^+(F)$$

は全単射になる [Voi14, §.28.3]. また, 狭義類数（つまり $\mathrm{Cl}^+(F)$ の位数）が 1 と仮定していたことから, $B_+^\times\backslash\widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times$ は自明になり,

$$\widehat{B}^\times = B_+^\times\widehat{\mathcal{O}}^\times$$

となる. よって, Shimura 多様体は,

$$X_0^B(\mathfrak{N})(\mathbb{C}) = B_+^\times\backslash(\mathcal{H}^n\times\widehat{B}^\times)/\widehat{\mathcal{O}}^\times \simeq B_+^\times\backslash(\mathcal{H}^n\times\{1\})/\widehat{\mathcal{O}}^\times \simeq \Gamma\backslash\mathcal{H}^n$$

となり, 連結な n 次元複素多様体になる. この $X_0^B(\mathfrak{N})(\mathbb{C})$ を Hilbert モジュラー多様体という. ここで, $\Gamma=\widehat{\mathcal{O}}^\times\cap B_+^\times$ であり, 二つ目の同型は

$$B_+^\times(z,1)\widehat{\mathcal{O}}^\times \mapsto \Gamma z$$

で与えられる. $\mathcal{H}^n\times\widehat{B}^\times/\widehat{\mathcal{O}}^\times$ 上の四元数モジュラー形式 $f(z,\widehat{\alpha}\widehat{\mathcal{O}}^\times)$ に対して, $\mathcal{H}^n$ 上の関数 $\widetilde{f}(z)$ を次で定義する：

$$\widetilde{f}(z) := f(z,\widehat{\mathcal{O}}^\times).$$

すると, $\gamma\in\Gamma=\widehat{\mathcal{O}}^\times\cap B_+^\times$ に対して

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\gamma z) &= f(\gamma z,\widehat{\mathcal{O}}^\times)\\
&= \left(\prod_{i=1}^n \frac{j(\gamma_i,z_i)^2}{\det\gamma_i}\right)\left(\prod_{i=1}^n \frac{\det\gamma_i}{j(\gamma_i,z_i)^2}\right) f(\gamma z,\gamma\gamma^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times)\\
&= \left(\prod_{i=1}^n \frac{j(\gamma_i,z_i)^2}{\det\gamma_i}\right)(f|\gamma)(z,\gamma^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times)\\
&= \left(\prod_{i=1}^n \frac{j(\gamma_i,z_i)^2}{\det\gamma_i}\right) f(z,\widehat{\mathcal{O}}^\times)\\
&= \left(\prod_{i=1}^n \frac{j(\gamma_i,z_i)^2}{\det\gamma_i}\right) \widetilde{f}(z)
\end{aligned}$$

となり, 古典的な Hilbert モジュラー形式の定義に現れる保型性が確認できる. ここで, 3 つ目の等式は $f|\gamma$ の定義から, 4 つ目の等式は $\gamma\in B^\times$ により $f|\gamma=f$ であることと $\gamma^{-1}\in\widehat{\mathcal{O}}^\times$ により $\gamma^{-1}\widehat{\mathcal{O}}^\times=\widehat{\mathcal{O}}^\times$ であることによる. また, この場合の Γ は

$$\Gamma=\left\{\gamma\in GL_2^+(\mathbb{Z}_F)\;\middle|\;\gamma\equiv\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mod \mathfrak{N}\right\}=\Gamma_0(\mathfrak{N})$$

であることもすぐにわかる. また, この場合, 素イデアル $\mathfrak{p}\subset\mathbb{Z}_F$ に対して, 総正な生成元 p を取ると, 集合 $\Theta(\mathfrak{p})$ は集合

$$\mathcal{O}^\times\backslash\{\pi\in\mathcal{O}_+ \mid \mathrm{nrd}\,(\pi)=p\}$$

と同一視できる．ここで対応は次のように定まる：$\widehat{\mathcal{O}}^{\times}\widehat{\pi}$ に対して $\widehat{\mathcal{O}}\widehat{\pi}\cap B$ が，左 $\mathcal{O}$-イデアルであり，F の狭義類数が 1 で B が indefinite であることから，任意の左 $\mathcal{O}$-イデアルは principal になるので，ある $\pi\in\mathcal{O}_{+}$ で $\widehat{\mathcal{O}}\widehat{\pi}\cap B=\mathcal{O}\pi$ と書けることにより，$\widehat{\mathcal{O}}^{\times}\widehat{\pi}\mapsto\mathcal{O}\pi$ とすることで定まる．ここで，$I\subset B$

今，$\mathcal{O}_{+}\subset \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_F)$ であることを加味すると，$\Theta(\mathfrak{p})$ は $N(\mathfrak{p})+1$ 個の元

$$\left\{\begin{pmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & x\\ 0 & p\end{pmatrix}\ (x\in\mathbb{Z}_F/\mathfrak{p})\right\}$$

で代表されることがわかり，これも古典的な Hecke 作用素の定義と整合している．

$B=M_2(F)$ のとき，任意のカスプで零となる $M_2^B(\mathfrak{N})$ の元のなす部分空間を $S_2^B(\mathfrak{N})$ とかく．B が indefinite で，かつ $B\not\simeq M_2(F)$ のとき，$S_2^B(\mathfrak{N})=M_2^B(\mathfrak{N})$ と定義する．また，B が totally definite のとき，$M_2^B(\mathfrak{N})$ に含まれる定数関数のなす空間の，自然に入る内積に関する直交補空間を $S_2^B(\mathfrak{N})$ とおく．これら $S_2^B(\mathfrak{N})$ の元をウエイト $(2,\ldots,2)$，レベル $\mathfrak{N}$ のカスプ形式という．

本稿で紹介する方法で重要な道具となる Jacquet-Langlands 対応について，ステートメントを述べておく．

定理 11.2.4 (Jacquet-Langlands 対応 [JL70])．次の Hecke 作用で同変な同型が存在する：

$$S_2(\mathfrak{D}\mathfrak{N})^{\mathfrak{D}\text{-new}}\simeq S_2^B(\mathfrak{N}).$$

ここで，$\mathfrak{D}$ は B の判別式，$S_2(\mathfrak{D}\mathfrak{N})^{\mathfrak{D}\text{-new}}$ は空間 $S_2(\mathfrak{D}\mathfrak{N})$ の $\mathfrak{D}$ に関する new part.

11.3 Hilbert モジュラー形式の計算理論

具体的な計算アルゴリズムについて説明する．以下，ウエイトは $(2,\ldots,2)$，F の狭義類数は 1 と仮定する．

$B=\mathrm{M}_2(F)$ のとき，$B^{\times}=\mathrm{GL}_2(F)$ であることから，Hilbert モジュラー形式は四元数環の乗法群に対応するモジュラー形式の一種であることは前節で確認した．B を上手く取り，Jacquet-Langlands 対応を介することで，計算より簡単に行えるモジュラー形式に帰着することがカギである．

ここで，四元数環の持つ制約「分岐する素点は偶数個」であることを思いだすと，Jacquet-Langlands 対応を使って $S_2(\mathfrak{N})$ を計算するためには，$n=[F:\mathbb{Q}]$ が奇数の場合，四元数環 B として，$v_2,\cdots,v_n$ でのみ分岐するものを，$n=[F:\mathbb{Q}]$ が偶数の場合，四元数環 B として，全ての実素点でのみ分

岐するものを取れば $\mathfrak{D} = \mathcal{O}_F$ として

$$S_2(\mathfrak{N}) \simeq S_2^B(\mathfrak{N})$$

となり, new part を取る必要がなくなる. こう取ることで, $n = [F:\mathbb{Q}]$ が奇数のとき, 1 次元多様体上の計算（Greenberg-Voight [GV11]）に $n = [F:\mathbb{Q}]$ が偶数のとき, 0 次元多様体上の計算（Dembélé [Dem05], [Dem07]）に帰着される. 前者のケースで使われる Greenberg-Voight の手法を indefinite method, 後者のケースで使われる Dembélé による方法を definite method と呼ぶ.

以下, ウエイトを parallel ウエイト 2, F の狭義類数を 1 と仮定して, §.3.1 で indefinite method, §.3.2 で definite method のアルゴリズムを具体的に解説する. ここでは, 簡単のためにウエイトは parallel に 2 にしているが, parity が同じウエイトであれば同様の手法で計算できることを注意しておく. また, 双方の方法ともそれぞれ Voight [Voi10], Dembélé-Donnelly [DD08] で一般の類数に拡張されている.

注意 11.3.1. 主結果 Theorem 1.1 は indefinite method と definite method 各々が扱えない状況をカバーする形で得られている. また, 両方の手法で計算することが可能な状況もあることにも注意しておく.

11.3.1 Indefinite method

Indefinite method について説明する. ここでポイントとなることは $r = 1$ の場合は Γ の計算理論がかなり進展していることである. そのため, モジュラー形式の計算を Γ の群コホモロジーの計算に帰着することで, 実行可能なアルゴリズムを構成できる.

$[F:\mathbb{Q}]$ が奇数で, F の狭義類数が 1 と仮定する. B が v_1 で split, $v_2, \ldots, v_n$ で ramified のとき, $\Gamma = B_+^\times \cap \widehat{\mathcal{O}}^\times = \mathcal{O}_+^\times$ とおくと

$$X_0^B(\mathfrak{N})(\mathbb{C}) = B^\times \backslash \mathcal{H}^\pm \times \widehat{B}^\times / \widehat{\mathcal{O}}^\times \simeq \Gamma \backslash \mathcal{H}$$

となり Riemann 面となる. 更に, 今は Γ が放物元を持たないため, カスプは存在せず $X_0^B(\mathfrak{N})$ はコンパクトになる. このコンパクト Riemann 面を Shimura 曲線という. このとき, 四元数モジュラー形式は

$$S_2^B(\mathfrak{N}) = \{f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}\colon \text{holomorphic},\ f|\gamma = f \text{ for all } \gamma \in \mathcal{O}_+^\times\}$$

となる. 次の埋め込みを考える：

$$S_2^B(\mathfrak{N}) \hookrightarrow H^1(\Gamma, \mathbb{C})\colon \gamma \mapsto \left[\int_{\gamma^{-1}\tau}^{\tau} f(z)dz\right]$$

ここで, $H^1(\Gamma,\mathbb{C})$ は Γ の群コホモロジー（Γ は $\mathbb{C}$ に自明に作用）であり, $\tau\in\mathfrak{H}$ の choice は class としては依存しないことに注意. 群コホモロジー $H^1(\Gamma,\mathbb{C})$ は,

$$\begin{aligned}Z^1(\Gamma,\mathbb{C})&=\{h:\Gamma\to\mathbb{C}\mid h(\gamma\gamma')=h(\gamma)^{\gamma'}+h(\gamma')\}\\ B^1(\Gamma,\mathbb{C})&=\{h_m:\Gamma\to\mathbb{C}\colon\gamma\mapsto\gamma m-m\mid m\in\mathbb{C}\}\end{aligned}$$

に対して

$$H^1(\Gamma,\mathbb{C})=Z^1(\Gamma,\mathbb{C})/\ B^1(\Gamma,\mathbb{C})$$

で定義されていた. 今は parallel ウエイト 2 なので, Γ の $\mathbb{C}$ への作用は自明. よって結局,

$$Z^1(\Gamma,\mathbb{C})=\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C}),\ B^1(\Gamma,\mathbb{C})=\{0\}$$

より,

$$H^1(\Gamma,\mathbb{C})=\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C})$$

となる. $H^1(\Gamma,\mathbb{C})$ 上に $\mathbb{C}$-共役 W_∞ を次で定義：$\mu\in\mathcal{O}^\times$ で $v_1(\mathrm{nrd}\,(\mu))<0$ となるものが存在する. このとき, $\mu\Gamma\mu^{-1}\subset\Gamma$ であり $\mu^2\in\Gamma$ である. この μ を使って W_∞ を

$$(f|W_\infty)(\gamma)=f(\mu\gamma\mu^{-1})$$

と定義する. すると W_∞ は μ のとり方に依らない involution になる. この W_∞ でのプラスパートを $H^1(\Gamma,\mathbb{C})^+$ とおくと, 同型

$$S_2^B(\mathfrak{N})\simeq H^1(\Gamma,\mathbb{C})^+\subset\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C})$$

が得られる. $H^1(\Gamma,\mathbb{C})$ 側の Hecke 作用を見るために, $\mathcal{O}_F$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して,

$$\Theta(\mathfrak{p})=\mathcal{O}_+^\times\backslash\{x\in\mathcal{O}_+\mid\mathrm{nrd}\,(x)=\mathfrak{p}\}$$

の完全代表系を $\{x_1,\dots,x_s\}$ とおく. この代表系を計算するアルゴリズムについては [GV11, Prop. 5.7], [KV10, S.4] を参照. 元 $\gamma\in\Gamma$ に対して,

$$x_i\gamma=\delta_i x_{\gamma^*(i)}$$

を満たす $\delta_i\in\Gamma,\gamma^*(i)\in\{1,\dots,s\}$ を考える. このとき, $f\in H^1(\Gamma,\mathbb{C})^+\subset\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{C})$ への Hecke 作用 $T_\mathfrak{p}f$ を次で定義する：

$$(T_\mathfrak{p}f)(\gamma)=\sum_{i=1}^{s}f(\delta_i).$$

すると, 上の同型 $S_2(\mathfrak{N})\simeq H^1(\Gamma,\mathbb{C})^+$ は Hecke 作用で同変になる.

ここで, 前述のように次のことがポイントになる：Shimura 曲線 $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ の基本領域を計算することで, Γ の生成元の極小な集合とそれらの満たす関係の集

合, 更に, 語問題の解（solution of word problem）を与えるアルゴリズムが Voight [Voi09] により知られている．ここで, 語問題の解を与えるアルゴリズムとは, 与えられた 2 つの元 $x, y \in \Gamma$ が一致しているか否かを判定するアルゴリズムのことである．これにより, 上記の δ_i などを Γ の生成元で表すことが可能になる．

Γ の生成元 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ が生成する自由群を $G = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_s \rangle$, 関係のなす集合を R とする．考えている設定では R は有限になる．このとき, 上記の群コホモロジー $H^1(\Gamma, \mathbb{C})$ は

$$\{f \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}) \mid f(r) = 0 \text{ for all } r \in R\}$$

となる．特に, $H^1(\Gamma, \mathbb{C})$ の元は生成元での値で決まり, その空間の基底は $f(r) = 0$ $(r \in R)$ から導かれる関係式から線形代数的に計算できる．その基底を $\{f_1, \ldots, f_m\}$ とおく．W_∞ を計算し, それによる不変な元を探すことで $H^1(\Gamma, \mathbb{C})^+$ の基底 $\{f_1^+, \ldots, f_l^+\}$ を計算する．そこへの $T_\mathfrak{p} f_i^+$ の計算をすることで, $T_\mathfrak{p}$ の基底 $\{f_1^+, \ldots, f_l^+\}$ に対する行列表示が得られる：

$$T_\mathfrak{p} f_i^+(\gamma_j) = \sum_{k=1}^{l} f_i^+(\delta_{jk}) = c_{ij}$$

と $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ をおくと,

$$T_\mathfrak{p} f_i^+ = \sum_{j=1}^{l} c_{ij} f_j^+ = \begin{pmatrix} f_1^+ & \cdots & f_l^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i1} \\ \vdots \\ c_{il} \end{pmatrix}$$

となるので, $(c_{ij})_{i,j}$ が Hecke 作用を表す行列となる．具体的に c_{ij} を計算するためには, δ_{jk} に各生成元 γ_i が何度出現するか, を計算できればよい．具体的には, x_i と γ_j に対して, まず $\gamma^*(i)$ を計算し（cf. [GV11, Alg. 5.8]）, その上で, $x_i \gamma x_{\gamma^*(i)}^{-1}$ に対して語問題の解を与えるアルゴリズムを適用して生成元の積で表すことで計算することで可能になる．

11.3.2 Definite method

Definite method について, 概要を説明する．この場合は, totally definite な四元数環を採用することで, 有限集合上の関数の計算に帰着することができる．

$[F : \mathbb{Q}]$ を偶数とし, F の狭義類数が 1 と仮定する．四元数環 B として, $v_1, \ldots, v_n$ でのみ分岐するものを取る．このとき, $B_\infty^\times = K_\infty$ となるため

$$X_0^B(\mathfrak{N})(\mathbb{C}) \simeq B^\times \backslash \widehat{B}^\times / \widehat{\mathcal{O}}^\times$$

となる．この $X_0^B(\mathfrak{N})(\mathbb{C})$ は 0 次元 Shimura 多様体や Hida set などと呼ばれる．この $X_0^B(\mathfrak{N})$ は可逆右 $\mathcal{O}$-イデアル類のなす集合と $B^\times \widehat{\alpha} \widehat{\mathcal{O}}^\times \mapsto [\alpha \widehat{\mathcal{O}} \cap B]$

で一対一に対応し, 有限集合であることが知られている. ここで, 可逆右 $\mathcal{O}$-イデアル I, I' が同値であること, 即ち, $[I] = [I']$ であることを, ある $x \in B^\times$ が存在して $I' = xI$ と書けることと定義する. このとき, 四元数モジュラー形式は,

$$M_2^B(\mathfrak{N}) = \{f \colon B^\times \backslash \widehat{B}^\times / \widehat{\mathcal{O}}^\times \to \mathbb{C}\}$$

となる. 今, $B^\times \backslash \widehat{B}^\times / \widehat{\mathcal{O}}^\times$ 上定数関数であるものも $M_2^B(\mathfrak{N})$ には存在する. これらのなす部分空間を $E_2^B(\mathfrak{N})$ とおく. $M_2^B(\mathfrak{N})$ に自然に入る内積による直交補空間 $E_2^B(\mathfrak{N})^\perp$ を $S_2^B(\mathfrak{N})$ とおきカスプ形式の空間と呼ぶ.

両側剰余群 $B^\times \backslash \widehat{B}^\times / \widehat{\mathcal{O}}^\times$ の完全代表系を $S = \{\widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_m\}$ とおくと, $M_2^B(\mathfrak{N})$ の元は S での値で決まる. $M_2^B(\mathfrak{N})$ の基底を

$$f_i(\widehat{\alpha}_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する. F の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対する Hecke 作用素 $T_\mathfrak{p}$ は次のものだった：

$$\Theta(\mathfrak{p}) = \widehat{\mathcal{O}}^\times \backslash \{\widehat{\pi} \in \widehat{\mathcal{O}} \mid \mathrm{nrd}\,(\widehat{\pi})\widehat{\mathbb{Z}}_F \cap \mathbb{Z}_F = \mathfrak{p}\}$$

とおいたとき,

$$(f|T_\mathfrak{p})(\widehat{\alpha}) = \sum_{\widehat{\pi} \in \Theta(\mathfrak{p})} f(\widehat{\alpha}\widehat{\pi}^{-1}).$$

この $\Theta(\mathfrak{p})$ の部分集合 $\Theta(\mathfrak{p})_{i,j}$ を

$$\Theta(\mathfrak{p})_{i,j} = \{\widehat{\mathcal{O}}^\times \widehat{\pi} \in \Theta(\mathfrak{p}) \mid \widehat{\alpha}_i \widehat{\pi}^{-1} = b_{\widehat{\pi}} \widehat{\alpha}_j \widehat{u}_{\widehat{\pi}} \text{ for some } b_{\widehat{\pi}} \in B^\times, \widehat{u}_{\widehat{\pi}} \in \widehat{\mathcal{O}}^\times\}$$

とおくと, Hecke 作用を簡単に書き直すことができて,

$$(f|T_\mathfrak{p})(\widehat{\alpha}_i) = \sum_{\widehat{\pi} \in \Theta(\mathfrak{p})} f(\widehat{\alpha}_i \widehat{\pi}^{-1}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\widehat{\pi} \in \Theta(\mathfrak{p})_{i,j}} f(b_{\widehat{\pi}} \widehat{\alpha}_j \widehat{u}_{\widehat{\pi}}) = \sum_{j=1}^{m} f(\widehat{\alpha}_j) \# \Theta(\mathfrak{p})_{i,j}$$

となる. この係数を成分にもつ行列

$$B_\mathfrak{p} := (b_{ij})_{i,j} = (\#\Theta(\mathfrak{p})_{i,j})_{i,j} \in M_m(\mathbb{Z})$$

を $\mathfrak{p}$ での Brandt 行列という. これは, 基底 $\{f_1, \ldots, f_m\}$ に関する Hecke 作用の行列表示を与えている.

この Brandt 行列を計算するアルゴリズムについて説明する. 今, $B^\times \backslash \widehat{B}^\times / \widehat{\mathcal{O}}^\times$ は可逆右 $\mathcal{O}$ イデアル類のなす集合と同一視できるのだった. そこで $\Theta(\mathfrak{p})_{i,j}$ に渡る和を取ることをイデアルを用いて書き直してみる. $J = \widehat{\alpha}_i \widehat{\pi}^{-1} \widehat{\mathcal{O}} \cap B$, $I_k = \widehat{\alpha}_k \widehat{\mathcal{O}} \cap B$ とおくことで,

$$\Theta(\mathfrak{p})'_{i,j} = \{J : \text{invertible right } \mathcal{O}\text{-ideal}, J \supset I_i, \mathrm{nrd}(J) = \mathrm{nrd}(I_i)\mathfrak{p}^{-1}, [J] = [I_j]\}$$

に渡る和を取ることと同値になる．ちなみに, このとき $\{I_1, \ldots, I_m\}$ は可逆右 $\mathcal{O}$-イデアル類のなす集合の完全代表系を与える．この代表系を計算するアルゴリズムについては [KV10, §.7] を参照．更に計算しやすくするために, 元を用いて書き換えてみる．$[J] = [I_j]$ であることから, ある $x \in B^\times$ で, $xJ = I_j$ となる．よって, $x \in I_j J^{-1} \subset I_j I_i^{-1}$ となる．また, このとき, $xJ = I_j$ と $\mathrm{nrd}\,(J) = \mathrm{nrd}\,(I_i)\mathfrak{p}^{-1}$ から,

$$\mathrm{nrd}\,(x)\mathbb{Z}_F = \mathfrak{p}\frac{\mathrm{nrd}\,I_j}{\mathrm{nrd}\,I_i}$$

となる．さらに, $h_F^+ = 1$ であることから, 現れる $\mathbb{Z}_F$ のイデアルの総正な生成元を $\mathfrak{p} = (p), \mathrm{nrd}\,I_k = (q_k)$ とおくと,

$$\mathrm{nrd}\,(x) = p\frac{q_j}{q_i}$$

となる．これらを満たす $x \in B^\times$ は, $\mathcal{O}_i = \{x \in B \mid xI_i \subset I_i\}$ とおいたとき, $x^{-1}\mathcal{O}_i = JI_i$ であることと, $\mathrm{nrd}\,(x)$ が固定されていることから,

$$(\mathcal{O}_i^\times)_1 = \{y \in \mathcal{O}_i^\times \mid \mathrm{nrd}\,(y) = 1\}$$

による倍数を除いて決まる．よって結局, $\Theta(\mathfrak{p})_{i,j}$ に渡る和を取ることは

$$\Theta''(\mathfrak{p})_{i,j} = (\mathcal{O}_i^\times)_1 \backslash \{x \in I_j I_i^{-1} \mid \mathrm{nrd}\,x = p\frac{q_j}{q_i}\}$$

に渡る和を取ることと同じことになる．よって, Brandt 行列の (i,j) 成分は,

$$\#\Theta''(\mathfrak{p})_{i,j} = \#\{x \in I_j I_i^{-1} \mid \mathrm{nrd}\,x = p\frac{q_j}{q_i}\}/\#(\mathcal{O}_i^\times)_1$$

を計算することに帰着される． 今, $B \hookrightarrow B \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^n \simeq \mathbb{R}^{4n}$ により, $I_j I_i^{-1} \simeq \mathbb{Z}^{4n}$ を $\mathbb{Z}$-格子と捉えることで, 格子点の個数をカウントする問題に帰着された．また, B が totally definite であることにより, $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} \circ \mathrm{nrd} : B \to \mathbb{R}$ は正定値二次形式になる．よって, 格子点 $x \in I_j I_i^{-1}$ として $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} \circ \mathrm{nrd}\,x = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(pq_j/q_i)$ を満たす x のみをカウントすればよいのだが, それを満たす x は正定値性から有限個しかない．よって, 計算は有限時間で終わることがわかる．

参考文献

[DD08] Lassina Dembélé and Steve Donnelly. Computing hilbert modular forms over fields with nontrivial class group. *Lecture notes in computer science*, 5011:371, 2008.

[Dem05] Lassina Dembélé. Explicit computations of hilbert modular forms on $\sqrt{5}$. *Experimental Mathematics*, 14(4):457–466, 2005.

[Dem07] Lassina Dembélé. Quaternionic manin symbols, brandt matrices, and hilbert modular forms. *Mathematics of Computation*, 76(258):1039–1057, 2007.

[DV13] Lassina Dembélé and John Voight. Explicit methods for hilbert modular forms. In *Elliptic curves, Hilbert modular forms and Galois deformations*, pages 135–198. Springer, 2013.

[DV16] Steve Donnelly and John Voight. A database of hilbert modular forms. *arXiv preprint arXiv:1605.02637*, 2016.

[GV11] Matthew Greenberg and John Voight. Computing systems of hecke eigenvalues associated to hilbert modular forms. *Mathematics of Computation*, 80(274):1071–1092, 2011.

[GY08] Paul E Gunnells and Dan Yasaki. Hecke operators and hilbert modular forms. In *International Algorithmic Number Theory Symposium*, pages 387–401. Springer, 2008.

[JL70] H Jacquet and RP Langlands. *Automorphic forms on GL(2)*, volume 114 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[KV10] Markus Kirschmer and John Voight. Algorithmic enumeration of ideal classes for quaternion orders. *SIAM Journal on Computing*, 39(5):1714–1747, 2010.

[O^+02] Kaoru Okada et al. Hecke eigenvalues for real quadratic fields. *Experimental mathematics*, 11(3):407–426, 2002.

[SW05] Jude Socrates and Dave Whitehouse. Unramified hilbert modular forms, with examples relating to elliptic curves. *Pacific Journal* *of Mathematics*, 219(2):333–364, 2005.

[Vig] M.-F. Vignéras. Arithmétique des algebres de quaternions. *Lecture Notes in Math*, 800.

[Voi09] John Voight. Computing fundamental domains for fuchsian groups. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 21(2):469, 2009.

[Voi10] John Voight. Computing automorphic forms on shimura curves over fields with arbitrary class number. In *ANTS*, pages 357–371. Springer, 2010.

[Voi14] John Voight. The arithmetic of quaternion algebras. *preprint*, 2014.

[木原横] 木田雅成, 原田昌晃, and 横山俊一. Magma で広がる数学の世界.