

## 10.

# 高さ と Arakelov 理論, それらの Galois 表現の計算への応用

内田 幸寛 (首都大学東京)

## 10.1 Introduction

本稿は 2017 年度整数論サマースクール「楕円曲線とモジュラー形式の計算」で行われた標題の講演の報告である。[6]において、特別なモジュラー形式に付随する Galois 表現の計算アルゴリズムが与えられているが、その中で必要なある多項式の係数の評価を B. Edixhoven, R. de Jong が与えている。本稿では、この評価 ([6, Theorem 11.7.6], 本稿では定理 10.3.1) について解説する。係数の評価は高さ関数を用いて記述され、その証明には算術曲面上の Arakelov 交点理論が用いられる。証明はかなり長いので、本稿では Arakelov 理論と関わる部分を中心に、証明の概略を解説する。本稿の構成は以下の通りである。10.2 節では、[6, Chapter 4] に沿って必要な範囲で高さ と Arakelov 理論について述べる。10.3 節では、[6, Chapters 9 and 11] にある係数の評価について解説する。

## 10.2 高さ と Arakelov 理論

本節では、[6, Chapter 4] に沿って高さ と算術曲面上の Arakelov 交点理論を解説する。本稿で用いられる内容に限ったので、より詳しい内容については、[1], [7], [12], [14], [16] を参照されたい。また、高さ関数については、[9], [17] も参照されたい。算術曲面のスキーム論的性質については、[13] に詳しくまとめられている。

## 10.2.1 高さ関数

$K$  を代数体,  $\overline{K}$  を  $K$  の代数閉包,  $O_K$  を  $K$  の整数環,  $S$  を  $K$  の素点全体,  $S_f$  を  $K$  の有限素点全体,  $S_\infty$  を  $K$  の無限素点全体とする.  $K$  の  $\mathbb{C}$  への埋め込み全体を  $K(\mathbb{C})$  で表す. 各素点  $v \in S$  に対して,  $K$  上の乗法付値  $|\cdot|_v$  を以下のように定める. 有限素点  $v \in S_f$  に対して,  $K$  の  $v$  における剰余体を  $k(v)$  とする.  $x \in K^\times$  に対して,  $|x|_v = \#k(v)^{-\text{ord}_v(x)}$  と定義し,  $|0|_v = 0$  とする. 無限素点  $v \in S_\infty$  に対して, 対応する体の埋め込みを  $\sigma_v: K \hookrightarrow \mathbb{C}$  とする.  $x \in K$  に対して,  $\sigma_v(K) \subset \mathbb{R}$  ならば  $|x|_v = |\sigma_v(x)|$ , そうでなければ  $|x|_v = |\sigma_v(x)|^2$  と定義する. ただし右辺は通常の絶対値である. このとき, 任意の  $x \in K^\times$  に対して, 積公式 (product formula)

$$\prod_{v \in S} |x|_v = 1$$

が成り立つ.

代数的数  $x \in K$  の (対数的) 高さ ((logarithmic) height) は次の式で定義される.

$$\begin{aligned} h_K(x) &= \sum_{v \in S} \log \max\{1, |x|_v\} \\ &= \sum_{v \in S_f} \log \max\{1, |x|_v\} + \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \log \max\{1, |\sigma(x)|\}. \end{aligned}$$

$x$  の絶対 (対数的) 高さ (absolute (logarithmic) height) を

$$h(x) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} h_K(x)$$

で定義する. 右辺は  $x$  が属する代数体  $K$  の取り方によらないので, 関数  $h: \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{R}$  が定まる.

射影空間  $\mathbb{P}^n$  上の高さ関数を次のように定義する.  $x = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$  に対して,

$$h_K(x) = \sum_{v \in S} \log \max\{|x_0|_v, \dots, |x_n|_v\}, \quad h(x) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} h_K(x). \quad (10.1)$$

この定義は斉次座標の取り方によらない. また,  $h(x)$  は  $x \in \mathbb{P}^n(K)$  となる代数体  $K$  の取り方によらない. したがって, 絶対対数的高さは  $\mathbb{P}^n(\overline{K})$  上定義されていると見なせる.

$K$  上定義された射影多様体  $X$  上の高さは, 射影空間への埋め込みによって定義される. より一般に,  $X$  上の直線束  $L$  に対して, 高さ関数  $h_L$  が有界関数の差を除いて定まる. さらに,  $L_1, L_2$  を  $X$  上の直線束とすると,

$h_{L_1 \otimes L_2} = h_{L_1} + h_{L_2} + O(1)$  が成り立つ. ここで,  $O(1)$  は  $X(\overline{K})$  上のある有界関数を表す. このような有界関数による曖昧さを避けるために, 以下では Arakelov 理論に沿った定式化を述べる.

$\mathcal{E}$  を有限階数局所自由  $\mathcal{O}_X$  加群とする. 各点  $x \in X(\mathbb{C})$  に対して, ファイバー  $\mathcal{E}_x$  は有限次元複素ベクトル空間である. 各ファイバー  $\mathcal{E}_x$  に Hermite 内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  が与えられているとき, これを  $\mathcal{E}$  の **Hermite 計量** (Hermitian metric) という. 計量  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  からノルム  $\| \cdot \|$  が定まり, 逆にノルムから計量が定まるので, ノルムによって計量を指定してもよい. 以下では, 計量は常に  $C^\infty$  であると仮定する (定義は [16, 1.13 節] 参照).

$\mathbb{Z}$  上平坦かつ準射影的な整スキームを算術多様体 (arithmetic variety) といい, 1 次元算術多様体を算術曲線 (arithmetic curve), 2 次元算術多様体を算術曲面 (arithmetic surface) という.  $X_{O_K}$  を  $X$  の  $O_K$  上のモデルで射影算術多様体であるものとする. このとき生成ファイバー  $X_{O_K} \times_{O_K} K$  は  $X$  に一致する.  $\mathcal{L}$  を  $X_{O_K}$  上の直線束とする.  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{L} \times_{O_K} K$  の Hermite 計量  $\| \cdot \|$  の組  $(\mathcal{L}, \| \cdot \|)$  を  $X_{O_K}$  の **Hermite 直線束** (Hermitian line bundle) または **metrized line bundle** という. 以下では  $(\mathcal{L}, \| \cdot \|)$  を単に  $\mathcal{L}$  と書くこともある.

$X_{O_K}$  が算術曲線の場合として,  $X = \text{Spec}(K)$ ,  $X_{O_K} = \text{Spec}(O_K)$  を考える. このとき,  $X_{O_K}$  の Hermite 直線束  $(\mathcal{L}, \| \cdot \|)$  は, 可逆  $O_K$  加群  $L$  と各  $\sigma \in K(\mathbb{C})$  から定まるテンソル積  $L \otimes_{O_K, \sigma} \mathbb{C}$  の Hermite 計量  $\| \cdot \|_\sigma$  の集合の組  $(L, \{ \| \cdot \|_\sigma \}_{\sigma \in K(\mathbb{C})})$  に対応する.  $(\mathcal{L}, \| \cdot \|)$  の算術的度数 (arithmetic degree) または **Arakelov 度数** (Arakelov degree) を

$$\deg(\mathcal{L}, \| \cdot \|) = \log \#(L/O_K s) - \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \log \|s\|_\sigma$$

で定義する. ただし,  $s$  は  $L$  の任意の 0 でない元であり, 積公式より右辺は  $s$  の取り方によらない.

$X_{O_K}$  の Hermite 直線束  $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, \| \cdot \|)$  に対して,  $X$  上の高さ関数を次のように定義する.  $x \in X(K)$  とする.  $X_{O_K}$  は  $O_K$  上固有だから,  $x$  に対応する射  $\text{Spec}(K) \rightarrow X$  は射  $\text{Spec}(O_K) \rightarrow X_{O_K}$  に拡張される. これを再び  $x$  と書く. このとき,  $x^*(\mathcal{L}, \| \cdot \|)$  は  $\text{Spec}(O_K)$  の Hermite 直線束となるから,

$$h_{\overline{\mathcal{L}}, K}(x) = \deg x^*(\mathcal{L}, \| \cdot \|), \quad h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} h_K(x)$$

と定義する. 計量を別の計量に取り替えると, 高さ関数は有界関数の差だけ変化する.  $X = \mathbb{P}_K^n$  の場合は,  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$  に Fubini-Study 計量を入れたものを考えると,  $h_{\overline{\mathcal{L}}}$  は (10.1) の  $h$  と有界関数の差を除いて一致する ([16, 命題 9.10] 参照).

## 10.2.2 算術曲面上の交点理論

$X$  を種数  $g > 0$  のコンパクト Riemann 面とする. 正則微分形式の空間  $H^0(X, \Omega_X^1)$  に次の自然な Hermite 内積が入る.

$$(\omega, \eta) \mapsto \frac{i}{2} \int_X \omega \wedge \bar{\eta}.$$

$\omega_1, \dots, \omega_g$  をこの内積に関する正規直交基底とする.  $X$  上の  $(1, 1)$  形式  $\mu$  を

$$\mu = \frac{i}{2g} \sum_{k=1}^g \omega_k \wedge \bar{\omega}_k$$

で定義する. これを **Arakelov (1, 1) 形式** (Arakelov (1, 1)-form) または標準 **Kähler 形式** (canonical Kähler form) という.

$z = x + iy$  を  $X$  の局所正則座標とし, 局所的に  $C^\infty$  な関数  $f$  に対して,  $\partial f = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) \cdot dz$ ,  $\bar{\partial} f = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}) \cdot d\bar{z}$  とする.

**命題 10.2.1.** 任意の  $a \in X$  に対して,  $C^\infty$  関数  $g_{a,\mu}: X \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  がただ一つ存在して, 以下の性質を満たす.

1.  $a$  の近傍で  $g_{a,\mu} = \log|z - z(a)| + h$  と表される. ただし,  $z$  は局所正則座標,  $h$  は  $C^\infty$  関数である.
2.  $X \setminus \{a\}$  上で  $\partial\bar{\partial}g_{a,\mu} = \pi i\mu$ .
3.  $\int_X g_{a,\mu}\mu = 0$ .

**命題 10.2.1** の  $g_{a,\mu}$  を **Arakelov-Green 関数** (Arakelov-Green function) という. 点  $a$  も変数と見なして,  $g_\mu(a, b) = g_{a,\mu}(b)$  と書く. 任意の相異なる点  $a, b \in X$  に対して,  $g_\mu(a, b) = g_\mu(b, a)$  が成り立つことが知られている.

$\mathcal{L}$  をコンパクト Riemann 面  $X$  の Hermite 直線束として, その計量から定まるノルムを  $\|\cdot\|$  とする.  $s$  を  $\mathcal{L}$  の 0 でない有理型切断として,  $\mathcal{L}$  の第 1 Chern 形式を  $c_1(\mathcal{L}) = -\frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log\|s\|^2$  で定義する.  $\mathcal{L}$  が許容直線束 (admissible line bundle) であるとは, 定数  $c$  が存在して,  $c_1(\mathcal{L}) = c\mu$  となることをいう.  $\mathcal{L}$  が許容直線束ならば,  $c_1(\mathcal{L}) = (\deg \mathcal{L}) \cdot \mu$  であることが示される.

$X$  上の直線束  $\mathcal{L}$  に対して,  $\lambda(\mathcal{L}) = \det H^0(X, \mathcal{L}) \otimes \det H^1(X, \mathcal{L})^\vee$  をコホモロジーの行列式 (determinant of cohomology) という.

**定理 10.2.2** (cf. [7, Theorem 1]).  $X$  の種数を  $g$  とする.  $X$  上の任意の許容直線束  $\mathcal{L}$  に対して, 次の性質を満たす  $\lambda(\mathcal{L})$  上の計量が一意的に定まる.

1. 任意の計量同型  $\mathcal{L}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_2$  は計量同型  $\lambda(\mathcal{L}_1) \xrightarrow{\sim} \lambda(\mathcal{L}_2)$  を導く.
2.  $\mathcal{L}$  の計量を  $\alpha$  倍したとき,  $\lambda(\mathcal{L})$  の計量は  $\alpha^{\chi(\mathcal{L})}$  倍される. ただし,  $\chi(\mathcal{L}) = \deg \mathcal{L} - g + 1$  である.

3.  $X$  上の任意の因子  $D$  と任意の点  $P$  に対して, 完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(D - P) \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow P_*P^*\mathcal{O}_X(D) \rightarrow 0$$

は計量同型  $\lambda(\mathcal{O}_X(D)) \xrightarrow{\sim} \lambda(\mathcal{O}_X(D - P)) \otimes P^*\mathcal{O}_X(D)$  を導く.

4.  $\mathcal{L} = \Omega_X^1$  に対して,  $\lambda(\mathcal{L}) \cong \det H^0(X, \Omega_X^1)$  上の計量は  $H^0(X, \Omega_X^1)$  上の Hermite 内積  $(\omega, \eta) \mapsto (i/2) \int_X \omega \wedge \bar{\eta}$  で定義される.

定理 10.2.2 の計量を **Faltings 計量** (Faltings metric) という.

以下,  $\mathcal{X}$  を  $B = \text{Spec}(O_K)$  上の射影算術曲面とする. すなわち, 構造射  $p: \mathcal{X} \rightarrow B$  は平坦かつ射影的で,  $\mathcal{X}$  は 2 次元整スキームとする. さらに,  $\mathcal{X}$  は正則であり,  $\mathcal{X}$  の生成ファイバー  $X$  は幾何学的に既約かつ滑らかな  $K$  上の曲線とする.  $X$  の種数を  $g$  とする. 以下, 特に断らない限り  $p: \mathcal{X} \rightarrow B$  は半安定であると仮定する.

$D$  を  $\mathcal{X}$  上の素因子とする.  $p|_D: D \rightarrow S$  が全射であるとき,  $D$  は水平的 (horizontal) であるといい,  $p(D)$  が 1 点であるとき,  $D$  は垂直的 (vertical) であるという. 一般に, 水平的な素因子の線形結合で表される因子を水平的であるといい, 垂直的な素因子の線形結合で表される因子を垂直的であるという.  $\mathcal{X}$  上の任意の因子は水平的な因子と垂直的な因子の和として一意的に表される.

埋め込み  $\sigma \in K(\mathbb{C})$  に対して,  $\sigma$  で定まる基底変換  $X \times_{K, \sigma} \mathbb{C}$  を  $X_\sigma$  と書く.  $\text{Div}(\mathcal{X})$  を  $\mathcal{X}$  上の因子全体がなす群として,

$$\text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{X}) = \text{Div}(\mathcal{X}) \oplus \bigoplus_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \mathbb{R}F_\sigma$$

と定義する. ただし,  $F_\sigma$  は  $X_\sigma$  に対応する記号である.  $\text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{X})$  の元を **Arakelov 因子** (Arakelov divisor) という.  $\mathcal{X}$  の 0 でない有理関数  $f$  に対して, 主因子  $(f)$  を  $(f) = (f)_{\text{fin}} + (f)_{\text{inf}}$  で定める. ただし,  $(f)_{\text{fin}}$  は  $f$  の  $\mathcal{X}$  上の通常の Weil 因子であり,  $(f)_{\text{inf}} = \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} v_\sigma(f) \cdot F_\sigma$ ,  $v_\sigma(f) = -\int_{X_\sigma} \log|f|_\sigma \mu_\sigma$  である.  $D, E \in \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{X})$  が線形同値であるとは,  $D - E$  が主因子であることをいう. Arakelov 因子の線形同値類全体がなす群を  $\text{CH}_{\text{Ar}}^1(\mathcal{X})$  で表す.

$D, E \in \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{X})$  に対して, **Arakelov 交点数** (Arakelov intersection number)  $(D, E)_\mathcal{X}$  を以下のように定義する. 閉点  $x \in \mathcal{X}$  に対して,  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, x}$  の剰余体を  $k(x)$  で表す.  $D, E$  が  $\mathcal{X}$  上の相異なる素因子であり,  $x$  における局所方程式がそれぞれ  $f, g$  であるとき,

$$(D, E)_x = \text{length}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}, x}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}, x}/(f, g)) \log \#k(x)$$

と定義する.  $D, E \in \text{Div}(\mathcal{X})$  が共通成分を持たないとき, これを線形に拡張

して  $(D, E)_x$  を定義する.  $B$  の閉点  $s$  に対して,

$$(D, E)_s = \sum_x (D, E)_x$$

と定める. ただし,  $x$  は  $\mathcal{X}$  の  $s$  でのファイバー  $\mathcal{X}_s$  上の閉点をわたる.

$\sigma \in K(\mathbb{C})$  とする.  $D, E \in \text{Div}(\mathcal{X})$  は共通成分を持たないとする.  $D$  または  $E$  が垂直的なとき,  $(D, E)_\sigma = 0$  と定義する.  $D, E$  はともに水平的な素因子であるとする.  $X_\sigma$  への制限をそれぞれ  $D_\sigma, E_\sigma$  とする. このとき,

$$D_\sigma = \sum_{i=1}^d (P_i), \quad E_\sigma = \sum_{j=1}^e (Q_j)$$

と表せる. そこで,

$$(D, E)_\sigma = - \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^e g_\mu(P_i, Q_j)$$

と定義する. 一般の場合はこれを線形に拡張する.

$D, E \in \text{Div}(\mathcal{X})$  が共通成分を持たないとき,

$$(D, E)_\mathcal{X} = \sum_s (D, E)_s + \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} (D, E)_\sigma$$

と定義する. ただし,  $s$  は  $B$  の閉点全体をわたる.  $F_\sigma$  との交点数は以下のように定義する.  $D$  が垂直的な因子のとき,  $(F_\sigma, D)_\mathcal{X} = (D, F_\sigma)_\mathcal{X} = 0$  と定義する.  $\tau \in K(\mathbb{C})$  のとき,  $(F_\sigma, F_\tau)_\mathcal{X} = 0$  と定義する.  $D$  が水平的な因子で, 生成ファイバーでの次数が  $m$  のとき,  $(F_\sigma, D)_\mathcal{X} = (D, F_\sigma)_\mathcal{X} = m$  と定義する. 以上を線形に拡張することで,  $\mathcal{X}$  上に共通成分を持たない  $D, E \in \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{X})$  に対して  $(D, E)_\mathcal{X}$  が定義され,  $(D, E)_\mathcal{X} = (E, D)_\mathcal{X}$  が成り立つ.  $D, D' \in \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{X})$  が線形同値なとき,  $(D, E)_\mathcal{X} = (D', E)_\mathcal{X}$  となることが示される. よって, 任意の  $D, E \in \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{X})$  に対して  $(D, E)_\mathcal{X}$  が定義される. Arakelov 交点数は通常 of 交点数と同様に, 線形かつ対称である. Arakelov 交点数についてより詳しくは [1], [12], [14]などを参照せよ. 以下, 誤解のないときは  $(D, E)_\mathcal{X}$  を単に  $(D, E)$  と書く.

$\mathcal{X}$  の Hermite 直線束  $\mathcal{L}$  が許容直線束とは, 各  $\sigma \in K(\mathbb{C})$  に対して,  $\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L} \times_{K, \sigma} \mathbb{C}$  が  $X_\sigma$  の許容直線束であることをいう.  $\mathcal{X}$  の許容直線束の同型類全体を  $\widehat{\text{Pic}}(\mathcal{X})$  で表す. このとき, 自然な同型  $\text{CH}_{\text{Ar}}^1(\mathcal{X}) \cong \widehat{\text{Pic}}(\mathcal{X})$  が存在する [1, Proposition 2.2]. この同型によって,  $\text{CH}_{\text{Ar}}^1(\mathcal{X})$  の元と  $\widehat{\text{Pic}}(\mathcal{X})$  の元を同一視し, 後者の群演算も必要に応じて加法で書く.  $\omega_{\mathcal{X}/B}$  を  $p$  に対する双対化層 (dualizing sheaf) とする (定義は [13, Definition 6.4.18] 参照).  $\omega_{\mathcal{X}/B}$  に  $\mu$  から定まる Hermite 計量を入れることで許容直線束が得られる.

以下, Arakelov 交点数の性質を述べる.

命題 10.2.3.  $P: B \rightarrow \mathcal{X}$  を  $p$  の切断とする.  $D \in \text{Div}_{\text{Ar}}(\mathcal{X})$  に対して, 対応する許容直線束を  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$  で表す. 引き戻し  $P^*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$  は  $B$  の Hermite 直線束であり,

$$(D, P) = \deg P^*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D).$$

定理 10.2.4 (随伴公式).  $P: B \rightarrow \mathcal{X}$  を  $p$  の切断とする. このとき,

$$(P, P + \omega_{\mathcal{X}/B}) = 0.$$

以下の定理で用いられる行列式束について [16, 4.6 節] に従って述べる. より詳しくは [11] を参照せよ.  $S$  を正則かつ整な Noether スキーム,  $\mathcal{F}$  を  $S$  上の連接層とする. 直線束  $\det \mathcal{F}$  を次のように定義する. まず  $\mathcal{F}$  がねじれ元を持たないとき,  $U$  を  $S$  の開部分スキームで,  $\mathcal{F}|_U$  が局所自由であるものとする. このとき,  $i: U \rightarrow S$  を自然な開埋め込みとして,  $\det \mathcal{F} = i_* (\bigwedge^{\text{rank } \mathcal{F}|_U} \mathcal{F}|_U)$  と定める. 一般の場合,  $S^{(1)}$  を  $S$  の余次元 1 の点全体,  $\mathcal{T}$  を  $\mathcal{F}$  のねじれ部分とする.  $\det \mathcal{T} = \mathcal{O}_S(\sum_{x \in S^{(1)}} \text{length}_{\mathcal{O}_{S,x}} \overline{\mathcal{T}_x\{x\}})$  と定義し,  $\det \mathcal{F} = \det(\mathcal{F}/\mathcal{T}) \otimes \det \mathcal{T}$  と定義する.  $\pi: X \rightarrow S$  を Noether スキームの全射な固有射として,  $\mathcal{L}$  を  $X$  上の可逆層とする. このとき,  $\pi$  の行列式束 (determinant bundle) を  $\det \mathbf{R}\pi_* \mathcal{L} = \bigotimes_{i \geq 0} \det(R^i \pi_* \mathcal{L})^{(-1)^i}$  で定義する.

$\mathcal{L}$  を  $\mathcal{X}$  上の許容直線束とすると, 行列式束  $\det \mathbf{R}p_* \mathcal{L}$  に Faltings 計量が定まる. このとき以下の定理が成り立つ.

定理 10.2.5 (算術的 Riemann-Roch の定理, cf. [7, Theorem 3]).  $p: \mathcal{X} \rightarrow B$  は半安定であるとする.  $\mathcal{L}$  を  $\mathcal{X}$  上の許容直線束とする. このとき,

$$\deg \det \mathbf{R}p_* \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}, \mathcal{L} - \omega_{\mathcal{X}/B}) + \deg \det p_* \omega_{\mathcal{X}/B}. \quad (10.2)$$

注意 10.2.6. (10.2) は, [6, (4.4.9)] で述べられているものである. 一方, 講演の際は算術的 Riemann-Roch の定理を次の形で述べた.

$$\deg \det \mathbf{R}p_* \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}, \mathcal{L} - \omega_{\mathcal{X}/B}) + \deg \det \mathbf{R}p_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}. \quad (10.3)$$

例えば, [14, (6.13.1)], [16, 定理 4.32] は (記号の違いを除いて) 上の形で述べられている.  $p: \mathcal{X} \rightarrow B$  が半安定なとき, (10.2) と (10.3) は同値である. 実際, (10.3) が成り立つとすると,  $\mathcal{L} = \omega_{\mathcal{X}/B}$  とすれば,  $\deg \det \mathbf{R}p_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}} = \deg \det \mathbf{R}p_* \omega_{\mathcal{X}/B}$  である.  $p$  は半安定だから, Grothendieck 双対の跡写像  $R^1 p_* \omega_{\mathcal{X}/B} \rightarrow \mathcal{O}_B$  は同型である ([5, Corollary 4.4.5]). ゆえに,  $\deg \det \mathbf{R}p_* \omega_{\mathcal{X}/B} = \deg \det p_* \omega_{\mathcal{X}/B} - \deg \det R^1 p_* \omega_{\mathcal{X}/B} = \deg \det p_* \omega_{\mathcal{X}/B}$  が成り立つ. 逆も同様に示される.

注意 10.2.7. 算術的 Riemann-Roch の定理は半安定とは限らない算術曲面にも拡張されている. 例えば, [12, Chapter V, Theorem 3.4] を参照せよ.

定理 10.2.8 (算術的 Noether の公式, [7, Theorem 6], [15, Théorème 2.5]).  
 $p: \mathcal{X} \rightarrow B$  は半安定であるとする.  $s \in S_f$  に対して,  $\delta_s$  を  $\mathcal{X}$  の  $s$  での幾何学的ファイバーの特異点の個数とする.  $\delta(X_\sigma)$  を Faltings [7] が定義した Riemann 面  $X_\sigma$  の不変量とする. このとき,

$$12 \deg \det \mathbf{R}p_* \omega_{\mathcal{X}/B} = (\omega_{\mathcal{X}/B}, \omega_{\mathcal{X}/B}) + \sum_{s \in S_f} \delta_s \log \#k(s) \\ + \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \delta(X_\sigma) - 4g[K : \mathbb{Q}] \log 2\pi.$$

注意 10.2.9. 斎藤 [18, Theorem 2] は, 半安定とは限らない算術曲面に対する算術的 Noether の公式を与えた. ただし,  $\delta_s, \delta(X_\sigma)$  とは異なる不変量が用いられている.

## 10.3 Galois 表現の計算への応用

### 10.3.1 設定と主定理

[6] で与えられた Galois 表現の計算では, ある多項式の係数を評価する必要があった. まずどのような状況を考えているか復習する. 詳しくは本報告集中の [10] または [6, Chapter 8] を参照せよ.

$\zeta_r$  を 1 の原始  $r$  乗根とする.  $l > 5$  を素数とし,  $\mathbb{Q}$  上のモジュラー曲線  $X_1(5l)$  を  $X_l$  で表す.  $X_l$  の種数を  $g_l$  とすると,  $g_l = (l-2)^2$  である ([6, Section 8.1] 参照).  $X_l$  の Jacobi 多様体を  $J_l$  で表す. 計算する Galois 表現を  $\rho: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{F}$  として,  $\rho$  を実現する 2次元  $\mathbb{F}$  ベクトル空間  $V \subset J_l(\overline{\mathbb{Q}})[l]$  を考える. ただし,  $\mathbb{F}$  は標数  $l$  の有限体である ([6, Theorem 2.5.13, Section 8.2] 参照).  $D_0$  は  $X_l$  の尖点の線形結合として定義される,  $X_{l, \mathbb{Q}(\zeta_l)}$  上の次数  $g_l$  の有効因子であり, 任意の  $x \in V$  に対して,  $x$  が  $D_x - D_0$  の同値類であるような次数  $g_l$  の有効因子  $D_x$  がただ一つ存在する ([6, Propositions 8.1.7 and 8.2.2] 参照). 各  $D_x$  を  $D_x = D_x^{\text{fin}} + D_x^{\text{cusp}}$ ,  $D_x^{\text{fin}} = Q_{x,1} + \cdots + Q_{x,d_x}$ ,  $D_x^{\text{cusp}} = Q_{x,d_x+1} + \cdots + Q_{x,g_l}$  と表し,  $Q_{x,1}, \dots, Q_{x,d_x}$  は  $X_l$  の尖点でなく,  $Q_{x,d_x+1}, \dots, Q_{x,g_l}$  は  $X_l$  の尖点とする.  $b_l, x'_l$  は  $X_{l, \mathbb{Q}}$  上の有理関数として定義され, 極はすべて  $X_l$  の尖点である.

整数  $n$  を  $0 \leq n \leq g^2 \cdot (\#\mathbb{F})^4$  の範囲で選び,  $f_l = b_l + nx'_l$  としたとき,  $f_l$  を集合  $\{Q_{x,i} \mid x \in V, 1 \leq i \leq d_x\}$  に制限した写像が単射になるようにする. 各  $x \in V$  に対して,  $\overline{\mathbb{Q}}$  係数多項式  $P_{D_0, f_l, x}$  を

$$P_{D_0, f_l, x}(t) = \prod_{i=1}^{d_x} (t - f_l(Q_{x,i}))$$



で定義する. 整数  $m$  を  $0 \leq m \leq g \cdot (\#\mathbb{F})^4$  の範囲で選び, 写像

$$a_{D_0, f_l, m}: V \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}; \quad x \mapsto P_{D_0, f_l, x}(m)$$

が単射であるようにする. 最後に, 多項式  $P_{D_0, f_l, m}$  を

$$P_{D_0, f_l, m} = \prod_{x \in V} (T - a_{D_0, f_l, m}(x)) = \sum_{j=0}^{(\#\mathbb{F})^2} P_j T^j \quad (10.4)$$

で定義すると, これは  $\mathbb{Q}(\zeta_l)$  係数多項式である. 本稿の目的は次の定理の証明を解説することである.

定理 10.3.1 ([6, Theorem 11.7.6]). 整数  $c$  が存在して, 上のようなすべての  $l, V, D_0, f_l, m$  と, (10.4) のすべての  $P_j$  に対して,

$$h(P_j) \leq c \cdot l^{14} \cdot (\#\mathbb{F})^2.$$

### 10.3.2 証明の概略

定理 10.3.1 は次の命題に帰着される.

命題 10.3.2 ([6, Proposition 11.7.1]). 整数  $c$  が存在して, 上のようなすべての  $l, x \in V, i \in \{1, \dots, d_x\}$  に対して,

$$h(b_l(Q_{x,i})) \leq c \cdot l^{12}, \quad h(x'_l(Q_{x,i})) \leq c \cdot l^{12}.$$

命題 10.3.2 から定理 10.3.1 を導く議論は省略するが, 高さに関する不等式から従う. また, 次の補題から, 命題 10.3.2 は  $b_l$  に対して示せば十分である.

補題 10.3.3 ([6, Corollary 11.5.4]). 実数  $c$  が存在して, 上のようなすべての  $l, x \in V, i \in \{1, \dots, d_x\}$  に対して,

$$h(x'_l(Q_{x,i})) \leq c + 14h(b_l(Q_{x,i})).$$

補題 10.3.3 は楕円曲線上の Weil 高さと Néron-Tate 高さの差の評価によって得られる. このような差の評価は数多く知られているが, 詳しくは [4] とその中で挙げられている文献を参照されたい. [6] では Zimmer [20] による評価を引用しているが, 楕円曲線上の高さの定義は著者によって異なるので, まず [20] における定義を説明する.

$K$  を代数体,  $S$  を  $K$  の素点全体とする.  $E$  を  $y^2 = x^3 + Ax + B$  ( $A, B \in K$ ) で定義される楕円曲線とする.  $E$  の単位元を  $O$  とする.  $P = (x, y) \in E(K) \setminus \{O\}$  に対して,

$$h(P) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in S} \log \max\{1, |x|_v, |y|_v\}$$

と定義する. ただし,  $h(O) = 0$  とする.  $h(P)$  を  $P$  の (絶対) **Weil** 高さ ((absolute) Weil height) または単純な高さ (naive height) という. これは,  $E$  を  $\mathbb{P}^2$  内の射影曲線と見なしたとき,  $P \in E(K) \subset \mathbb{P}^2(K)$  の絶対対数的高さを  $h(P)$  と定義したことに相当する. また,

$$\hat{h}(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(2^n P)}{4^n}$$

と定義する.  $\hat{h}(P)$  を  $P$  の (絶対) **Néron-Tate** 高さ ((absolute) Néron-Tate height) または標準高さ (canonical height) という. 絶対対数的高さの場合と同様に, これらの高さは  $P \in E(K)$  となる代数体  $K$  の取り方によらないので,  $E(\overline{K})$  上で定義されていると見なせる.

注意 10.3.4. Weil 高さや Néron-Tate 高さには別の定義が用いられることも多い. Weil 高さは,  $P = (x, y) \in E(K) \setminus \{O\}$  に対して,

$$h'(P) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in S} \log \max\{1, |x|_v\}$$

とも定義される. また, Néron-Tate 高さは, この  $h'(P)$  を用いて,

$$\hat{h}'(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h'(2^n P)}{4^n}$$

とも定義される. さらに, これらの高さの  $1/2$  倍を用いることもある. [20] の定義との間には以下の関係がある. ある定数  $c_1, c_2$  が存在して, 任意の  $P \in E(\overline{K})$  に対して,

$$c_1 \leq h(P) - \frac{3}{2}h'(P) \leq c_2, \quad \hat{h}(P) = \frac{3}{2}\hat{h}'(P)$$

が成り立つ. これは, [20] で定義されている高さ  $d(P)$  との比較を行うことで示される. あるいは,  $h$  と  $\hat{h}$  が直線束  $\mathcal{O}_E(3O)$  に,  $h'$  と  $\hat{h}'$  が直線束  $\mathcal{O}_E(2O)$  に付随することに注意すると, 高さの一般論 ([9, Theorems B.3.2 and B.5.1] または [17, 定理 2.9, 定理 2.29]) から従う.

Zimmer の評価は次の通りである.

定理 10.3.5 ([20, p. 40]). 上述の設定のもとで, 任意の  $P \in E(\overline{K})$  に対して,

$$\begin{aligned} -2^{-1}(2^{-1}h(1 : A^3 : B^2) + 7 \log 2) &\leq h(P) - \hat{h}(P) \\ &\leq 2^{-1}h(1 : A^3 : B^2) + 6 \log 2. \end{aligned}$$

補題 10.3.3 の証明.  $Q = Q_{x,i}$  とおく. [6, Section 8.2] の構成から, 有理関数  $y'_i$  があって, 点  $P = (x'_i(Q), y'_i(Q))$  は, 楕円曲線

$$E_{b_i(Q)} : y^2 + (b_i(Q) + 1)xy + b_i(Q)y = x^3 + b_i(Q)x^2$$

のねじれ点である。以下、 $b = b_l(Q)$ ,  $u = x'_l(Q)$ ,  $v = y'_l(Q)$  と表す。定理 10.3.5 を用いるために、次のように変数変換する。

$$v_1 = v + ((b+1)u + b)/2, \quad u_1 = u + (b + (b+1)^2/4)/3.$$

このとき、点  $P' = (u_1, v_1)$  は楕円曲線  $E'_b: y^2 = x^3 + Ax + B$  のねじれ点である。ただし、 $A, B$  はそれぞれ  $b$  の  $\mathbb{Q}$  係数 4 次式、6 次式である。よって、ある実数  $c_1, c_2$  が存在して、

$$h(A) \leq c_1 + 4h(b), \quad h(B) \leq c_2 + 6h(b).$$

ゆえに、ある実数  $c_3$  が存在して、

$$h(1 : A^3 : B^2) \leq c_3 + 3 \cdot 4h(b) + 2 \cdot 6h(b) = c_3 + 24h(b).$$

点  $P'$  はねじれ点だから、 $\hat{h}(P') = 0$  である（例えば、[19, Chapter VIII, Theorem 9.3 (d)] を参照）。よって、定理 10.3.5 より、ある実数  $c_4$  が存在して、

$$h(P') \leq c_4 + 12h(b).$$

$h(u_1) \leq h(u_1 : v_1 : 1) = h(P')$  に注意すると、ある実数  $c_5, c_6$  が存在して、

$$h(u) = h(u_1 - (b + (b+1)^2/4)/3) \leq c_5 + h(u_1) + 2h(b) \leq c_6 + 14h(b)$$

となり、補題の不等式が示された。□

$h(b_l(Q_{x,i}))$  の評価は Arakelov 理論を用いて行われる。まず高さを Arakelov 交点数で評価する。

定理 10.3.6 ([6, Theorem 9.1.1]).  $x \in V$ ,  $i \in \{1, \dots, d_x\}$  とする。  $K$  を  $\mathbb{Q}(\zeta_{5l})$  を含む代数体で、 $Q_{x,i}$  が  $K$  上定義されるものとする。  $\mathcal{X}$  を  $X_l$  の  $O_K$  上の極小正則モデルとする。  $\sigma \in K(\mathbb{C})$  に対して、 $X_{l,\sigma}$  を  $X_l \times_{K,\sigma} \mathbb{C}$  から定まる Riemann 面として、 $g_\sigma$  を  $X_{l,\sigma}$  上の Arakelov-Green 関数とする。このとき次が成り立つ。

$$\begin{aligned} h(b_l(Q_{x,i})) \leq & \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \left( (Q_{x,i}, b_l^* \infty)_{\mathcal{X}} + l^2 \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \sup_{X_{l,\sigma}} g_\sigma \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \int_{X_{l,\sigma}} \log(|b_l|^2 + 1) \mu_{X_{l,\sigma}} \right) + \frac{1}{2} \log 2. \quad (10.5) \end{aligned}$$

証明.  $\infty = (1:0) \in \mathbb{P}_{O_K}^1(O_K)$  とする。  $1$  を  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\infty)$  のトートロジー的切断として、

$$\|1\|_{\mathbb{P}^1}(x_0 : x_1) = \frac{|x_1|}{(|x_0|^2 + |x_1|^2)^{1/2}}$$

とする (Fubini-Study 計量).  $P = (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_{O_K}^1(O_K)$  に対して,

$$h'(P) = \frac{(P, \infty)_{\mathbb{P}^1}}{[K : \mathbb{Q}]}$$

とおく. 命題 10.2.3 より,

$$\begin{aligned} h'(P) &= \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \deg P^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\infty) \\ &= \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \left( \sum_{v \in S_f} \log \max\{|x_0|_v, |x_1|_v\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \log \sqrt{|\sigma(x_0)|^2 + |\sigma(x_1)|^2} \right). \end{aligned}$$

$z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  に対して,  $|z_0|^2 + |z_1|^2 \leq 2 \max\{|z_0|^2, |z_1|^2\}$  であり, 両辺の対数を取ると,  $\log \sqrt{|z_0|^2 + |z_1|^2} \leq \log \max\{|z_0|, |z_1|\} + (\log 2)/2$  である. よって,

$$\begin{aligned} h'(P) &\leq \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \left( \sum_{v \in S} \log \max\{|x_0|_v, |x_1|_v\} + \frac{[K : \mathbb{Q}]}{2} \log 2 \right) \\ &= h(P) + \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

$b = b_l$ ,  $Q = Q_{x,i}$ ,  $X = X_l$  とおく.  $\infty$  の  $\mathbb{P}_{O_K}^1$  での Zariski 閉包を  $\overline{\infty}$  と表す. このとき,

$$\begin{aligned} (b(Q), \infty)_{\mathbb{P}^1} &= \deg b(Q)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\infty), \|\cdot\|_{\mathbb{P}^1}) \\ &= \deg Q^*(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(b^*\overline{\infty}), b^*\|\cdot\|_{\mathbb{P}^1}) \\ &= (Q, b^*\overline{\infty})_{\mathcal{X}} + \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \log \left( \frac{\|\cdot\|_{\mathcal{X}}}{b^*\|\cdot\|_{\mathbb{P}^1}}(Q_\sigma) \right). \end{aligned}$$

[6, Proposition 9.1.5] より,  $b^*\overline{\infty}$  は垂直的因子を含まない. よって,  $(Q, b^*\overline{\infty})_{\mathcal{X}} = (Q, b^*\infty)_{\mathcal{X}}$  である. また,

$$\log \left( \frac{\|\cdot\|_{\mathcal{X}}}{b^*\|\cdot\|_{\mathbb{P}^1}}(Q_\sigma) \right) = \log \|\cdot\|_{\mathcal{X}}(Q_\sigma) - \log \|\cdot\|_{\mathbb{P}^1}(b(Q_\sigma))$$

である. これを 1 で評価すると,

$$\begin{aligned} &\log \|1\|_{\mathcal{X}}(Q_\sigma) - \log \|1\|_{\mathbb{P}^1}(b(Q_\sigma)) \\ &= g_\sigma(b^*\infty, Q_\sigma) + \frac{1}{2} \log(|b(Q)|^2 + 1) \\ &\leq \sup_{X_\sigma} g_\sigma \cdot \deg b + \frac{1}{2} \int_{X_\sigma} \log(|b|^2 + 1) \mu_{X_\sigma}. \end{aligned}$$

ここで, [6, Proposition 9.1.4] を用いた.  $\deg b = l^2 - 1$  であるから, 定理の不等式が成り立つ.  $\square$

不等式 (10.5) の第 2 項と第 3 項は以下の不等式で評価される. 定理 10.3.7 と命題 10.3.8 ではモジュラー曲線を Riemann 面として扱い,  $\mu$  を Arakelov (1,1) 形式,  $g_\mu$  を Arakelov-Green 関数とする.

定理 10.3.7 ([6, Theorem 11.3.1]). 実数  $c$  が存在して,  $X_1(pl)$  の種数が 1 以上となるすべての相異なる素数  $p, l$  と, すべての相異なる点  $a, b \in X_1(pl)$  に対して,

$$g_\mu(a, b) \leq c \cdot (pl)^6.$$

定理 10.3.7 は F. Merkl [6, Chapter 10] による Green 関数の評価から従うが, 証明は省略する.

命題 10.3.8 ([6, Proposition 11.6.1]). 実数  $A, B$  が存在して, すべての素数  $l > 5$  に対して,

$$\int_{X_1(5l)} \log(|b_l|^2 + 1) \mu \leq A + B \cdot l^6.$$

命題 10.3.8 の証明も省略する.

不等式 (10.5) の第 1 項  $(Q_{x,i}, b_l^* \infty)_{\mathcal{X}}$  を評価するために,  $P$  を  $X_l$  の尖点として,  $(D_x, P)_{\mathcal{X}}$  を評価する. 必要なら  $K$  を取り替えて,  $\mathbb{Q}(\zeta_{5l}) \subset K$  かつ  $Q_{x,1}, \dots, Q_{x,g_l} \in X_l(K)$  とする.  $B = \text{Spec}(O_K)$  として,  $p: \mathcal{X} \rightarrow B$  を  $X_l$  の極小正則モデルとする. このとき  $p$  は半安定であることに注意する. さらに, 必要なら  $K$  を拡大することで,  $p$  は分裂半安定 (split semistable) であるとしてよい.

$z \in \mathbb{C}^g$ ,  $\tau \in M_g(\mathbb{C})$ ,  $\text{Im } \tau > 0$  とする.  $\vartheta(z; \tau)$  を Riemann のテータ関数として,

$$\|\vartheta\|(z; \tau) = (\det \text{Im } \tau)^{1/4} \exp(-\pi {}^t \text{Im } z (\text{Im } \tau)^{-1} \text{Im } z) |\vartheta(z; \tau)|$$

と定義する.  $\|\vartheta\|(z; \tau)$  は  $z$  に関して  $\mathbb{Z}^g + \tau \mathbb{Z}^g$  を周期に持つので,  $\mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \tau \mathbb{Z}^g)$  上の関数と見なせる.

定理 10.3.9 ([6, Theorem 9.2.5]). 次の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & (D_x, P) + \log \# R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x) \\ & \leq -\frac{1}{2} (D_0, D_0 - \omega_{\mathcal{X}/B}) + 2g_l^2 \sum_{s \in S_f} \delta_s \log \# k(s) + \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \log \|\vartheta\|_{\sigma, \text{sup}} \\ & \quad + \frac{g_l}{2} [K : \mathbb{Q}] \log 2\pi + \frac{1}{2} \deg \det p_* \omega_{\mathcal{X}/B} + (D_0, P). \quad (10.6) \end{aligned}$$

ただし,  $\|\vartheta\|_{\sigma, \text{sup}}$  は  $\text{Pic}^{g-1}(X_\sigma)$  上での  $\|\vartheta\|(z; \tau_\sigma)$  の上限である.

証明には Arakelov 交点理論が用いられるが, これは次節で解説する.

不等式 (10.6) の右辺の各項の絶対値を評価すると, 最大でも  $O(l^{10})$  であることが様々な計算によって示される (詳細は [6, Sections 11.1–11.6] 参照).

また,  $\log \#R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x) \geq 0$  である. したがって, 整数  $c_3$  が存在して<sup>\*1</sup>, すべての  $l, x$  に対して,

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}(D_x, P) \leq c_3 \cdot l^{10}.$$

また, 整数  $c_4$  が存在して, すべての  $l, x, i$  に対して,

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}(Q_{x,i}, P) \geq c_4 \cdot l^6$$

であることが [6, Theorems 11.4.1 and 11.4.2] から示される. ゆえに, 整数  $c_5$  が存在して, すべての  $l, x, i$  に対して,

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}(Q_{x,i}, P) \leq c_5 \cdot l^{10}$$

である.  $\deg b_i^* \infty = O(l^2)$  だから, 整数  $c_6$  が存在して, すべての  $l, x, i$  に対して,

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}(Q_{x,i}, b_i^* \infty) \leq c_6 \cdot l^{12}$$

である. これと定理 10.3.7, 命題 10.3.8 より, 命題 10.3.2 が従う.

### 10.3.3 交点数の評価

本節では定理 10.3.9 の証明を [6, Section 9.2] に従って解説する. [6, Section 9.2] と同様に一般的な状況で考える.  $K$  を代数体,  $O_K$  を  $K$  の整数環,  $B = \text{Spec}(O_K)$  とする.  $p: \mathcal{X} \rightarrow B$  を,  $B$  上の正則かつ分裂半安定な射影算術曲面として, その生成ファイバー  $X \rightarrow \text{Spec}(K)$  は幾何学的既約であり, 種数が  $g \geq 1$  であるとする.  $D$  を  $X$  上の次数  $g$  の有効因子として, その  $\mathcal{X}$  での閉包も  $D$  と書くことにする.  $X$  の Jacobi 多様体を  $J$  とする.  $x \in J(K)$  をねじれ点として,  $x = [D_x - D]$  となる  $X$  の有効因子  $D_x$  がただ一つ存在するとする.  $x$  に対応する  $X$  上の直線束を  $\mathcal{L}_x$  とすると, この条件は  $h^0(\mathcal{L}_x(D)) = 1$  と言い換えられることに注意する.  $P: B \rightarrow \mathcal{X}$  を  $p$  の切断とする. このとき  $P$  は  $\mathcal{X}(B)$  の元である.

$\mathcal{X}$  上の  $\mathbb{Q}$  係数垂直的因子  $\Phi_{x,P}$  を次の性質で定義する:  $p$  のファイバーのすべての既約成分  $C$  に対して,  $(D_x - D - \Phi_{x,P}, C) = 0$  が成り立ち,  $P(B)$  と  $\Phi_{x,P}$  の台は交わらない. このような  $\Phi_{x,P}$  はただ一つ定まる (例えば, [12, Chapter III, Theorem 3.6] から従う).

有限素点  $s \in S_f$  は  $B$  の閉点に対応するので, この閉点も  $s$  で表す.  $s$  上の  $p$  の幾何学的ファイバーの特異点の個数を  $\delta_s$  で表す.

<sup>\*1</sup>  $c_3$  から始まるのは原著 [6] に合わせたためである.

定理 10.3.10 ([6, Theorem 9.2.1]).  $\mathcal{O}_B$  加群  $R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x)$  は  $B$  上のねじれ加群であり,

$$\begin{aligned} & (D_x, P) + \log \# R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x) + \frac{1}{8}(\omega_{\mathcal{X}/B}, \omega_{\mathcal{X}/B}) + \frac{1}{8} \sum_{s \in S_f} \delta_s \log \# k(s) \\ &= (D, P) - \frac{1}{2}(D + \Phi_{x,P}, D + \Phi_{x,P} - \omega_{\mathcal{X}/B}) + \frac{1}{2} \deg \det p_* \omega_{\mathcal{X}/B} \\ &+ \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \int_{X_\sigma} \log \|\vartheta\| (D_x^\sigma - Q) \cdot \mu_\sigma(Q) + \frac{g}{2} [K : \mathbb{Q}] \log 2\pi. \quad (10.7) \end{aligned}$$

定理 10.3.10 を示すために, 次の二つの補題が必要であるが, 証明は省略する. 以下, 因子や交点数は  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\text{Pic}}(\mathcal{X})$  で考える.

補題 10.3.11 ([6, Lemma 9.2.2]). 許容直線束  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x - D) \otimes p^* P^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x - D)^\vee$  と  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\Phi_{x,P})$  は数値的同値である.

補題 10.3.12 ([6, Lemma 9.2.3]).  $X$  を種数  $g \geq 1$  のコンパクト Riemann 面とする.  $D$  を種数  $X$  上の次数  $g$  の有効因子で,  $h^0(D) = 1$  を満たすものとする. このとき, コホモロジーの行列式  $\lambda(\mathcal{O}_X(D))$  は  $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$  と同一視される. さらに,  $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$  のトートロジー的切断 1 の長さに対して次の式が成り立つ.

$$\log \|1\| + \frac{\delta(X)}{8} + \int_X \log \|\vartheta\| (D - Q) \cdot \mu_X(Q) = 0.$$

定理 10.3.10 の証明. まず  $R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x)$  は  $B$  上のねじれ加群であることを示す.  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x)$  は接続層であり,  $p$  は射影的だから  $R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x)$  も接続層である ([8, Chapter III, Theorem 8.8]). したがって,  $\Gamma(B, R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x)) \cong H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x))$  は有限生成  $O_K$  加群であり, これがねじれ加群であることを示せばよい. そのためには,  $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x)) \otimes_{O_K} K \cong H^1(X, \mathcal{O}_X(D_x))$  が  $\{0\}$  に等しいことを示せばよい (cf. [16, 命題 3.5 (1)]). Riemann-Roch の定理より,  $h^0(D_x) - h^1(D_x) = \deg D_x - g + 1 = 1$  である.  $\mathcal{O}_X(D_x) \cong \mathcal{L}_x(D)$  より,  $h^0(D_x) = h^0(\mathcal{L}_x(D)) = 1$  であるから,  $h^1(D_x) = 0$  である.

次に (10.7) を示す. 随伴公式 (定理 10.2.4) より,

$$(D_x - D, P) = \deg P^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x - D).$$

補題 10.3.11 より,  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x) \otimes p^* P^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x - D)^\vee$  と  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D + \Phi_{x,P})$  は数値的同値である. よって, 算術的 Riemann-Roch の定理 (定理 10.2.5) より,

$$\begin{aligned} & \deg \det \mathbf{R}p_*(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x) \otimes p^* P^* \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D_x - D)^\vee) \\ &= \frac{1}{2}(D + \Phi_{x,P}, D + \Phi_{x,P} - \omega_{\mathcal{X}/B}) + \deg \det p_* \omega_{\mathcal{X}/B}. \end{aligned}$$

$\chi(\mathcal{O}_X(D_x)) = h^0(D_x) - h^1(D_x) = 1$  だから, [16, 命題 4.28 (2)] より,

$$\begin{aligned} & \deg \det \mathbf{R}p_*(\mathcal{O}_X(D_x) \otimes p^*P^*\mathcal{O}_X(D_x - D)^\vee) \\ &= \deg(\det \mathbf{R}p_*\mathcal{O}_X(D_x) \otimes P^*\mathcal{O}_X(D_x - D)^\vee) \\ &= \deg \det \mathbf{R}p_*\mathcal{O}_X(D_x) - \deg P^*\mathcal{O}_X(D_x - D). \end{aligned}$$

$p_*(\mathcal{O}_X(D_x))$  は関数 1 によって標準的に自明化されるから, 算術的次数の定義より,

$$\deg \det \mathbf{R}p_*\mathcal{O}_X(D_x) = - \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \log \|1\|_\sigma - \log \#R^1p_*\mathcal{O}_X(D_x).$$

ただし,  $\|1\|_\sigma$  は  $H^0(X_\sigma, \mathcal{O}_{X_\sigma}(D_x))$  のトートロジー的切断 1 の長さである. 補題 10.3.12 より,

$$\begin{aligned} \deg \det \mathbf{R}p_*\mathcal{O}_X(D_x) &= \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \int_{X_\sigma} \log \|\vartheta\|(D_x^\sigma - Q) \cdot \mu_\sigma(Q) \\ &\quad + \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \frac{\delta(X_\sigma)}{8} - \log \#R^1p_*\mathcal{O}_X(D_x). \end{aligned}$$

以上の式を組み合わせると,

$$\begin{aligned} (D_x - D, P) &= -\frac{1}{2}(D + \Phi_{x,P}, D + \Phi_{x,P} - \omega_{X/B}) - \deg \det p_*\omega_{X/B} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \int_{X_\sigma} \log \|\vartheta\|(D_x^\sigma - Q) \cdot \mu_\sigma(Q) \\ &\quad + \sum_{\sigma \in K(\mathbb{C})} \frac{\delta(X_\sigma)}{8} - \log \#R^1p_*\mathcal{O}_X(D_x) \end{aligned}$$

が成り立つ. 算術的 Noether の公式 (定理 10.2.8) によって  $\delta(X_\sigma)$  を消去することで, (10.7) を得る.  $\square$

定理 10.3.9 の証明. [7, Theorems 5 and 7] より,  $(\omega_{X/B}, \omega_{X/B}) \geq 0$  である. よって, 定理 10.3.10 と次の補題 10.3.13 より, 定理の不等式が成り立つ.  $\square$

補題 10.3.13 ([6, Lemma 9.2.6]). 次の不等式が成り立つ.

$$-\frac{1}{2}(D + \Phi_{x,P}, D + \Phi_{x,P} - \omega_{X/B}) \leq -\frac{1}{2}(D, D - \omega_{X/B}) + 2g^2 \sum_{s \in S_f} \delta_s \log \#k(s).$$

証明\*2.  $\Phi = \Phi_{x,P}$  とおく.  $\Phi$  の定義より,  $(D_x - D - \Phi, \Phi) = 0$  である. よって,  $(\Phi, \Phi) = (D_x - D, \Phi)$  となるから,

$$-\frac{1}{2}(D + \Phi, D + \Phi - \omega_{X/B}) = -\frac{1}{2}(D, D - \omega_{X/B}) + \frac{1}{2}(\Phi, \omega_{X/B} - D - D_x).$$

\*2 以下の証明は [6, Lemma 9.2.6] の証明と基本的に同じであるが, グラフと電気回路に関する議論はより直接的なものに置き換えている.



$\Phi = \sum_C \Phi(C) \cdot C$  と表す.  $B$  の閉点  $s$  に対して,  $s$  における  $p$  のファイバーを  $F_s$  とし,  $A_s = \sup_{C \subset F_s} |\Phi(C)|$  とおく.  $C$  を任意の垂直的素因子とする. このとき,  $(\omega_{\mathcal{X}/B}, C) \geq 0$  が成り立つ ([7, Theorem 5 and Proof of Theorem 7 (a)]). また,  $D, D_x$  は水平的な有効因子だから,  $(D, C) \geq 0$ ,  $(D_x, C) \geq 0$  である. よって,

$$\frac{1}{2}(\Phi, \omega_{\mathcal{X}/B} - D - D_x) \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{s \in S_f} A_s F_s, \omega_{\mathcal{X}/B} + D + D_x \right).$$

$D, D_x$  は次数  $g$  の水平的な有効因子だから,  $(F_s, D) = (F_s, D_x) = g \log \#k(s)$  である. また,  $(F_s, \omega_{\mathcal{X}/B}) = (2g - 2) \log \#k(s)$  が成り立つ ([13, Proposition 9.1.35]). よって,

$$\frac{1}{2}(\Phi, \omega_{\mathcal{X}/B} - D - D_x) \leq 2g \sum_{s \in S_f} A_s \log \#k(s).$$

ゆえに,  $A_s \leq g\delta_s$  を示せばよい.

以下,  $B$  の閉点  $s$  を固定する.  $\mathcal{X}$  の  $s$  でのファイバーを  $F_s$  とする.  $F_s$  の既約成分全体を  $S_0 = \{C_1, \dots, C_n\}$  とし,  $F_s$  上の通常二重点全体を  $S_1$  とする. 必要なら番号を付け替えて, 切断  $P: B \rightarrow \mathcal{X}$  が交わる既約成分を  $C_n$  としてよい.  $p: \mathcal{X} \rightarrow B$  は分裂半安定だから, 特異点として  $k(s)$  上の通常二重点のみを持つ. 多重ファイバー上の点は通常二重点ではないから,  $p$  は多重ファイバーを持たない. よって, 因子として  $F_s = \sum_{i=1}^n C_i$  が成り立つ. また, 任意の  $j = 1, \dots, n$  に対して  $(F_s, C_j) = \sum_{i=1}^n (C_i, C_j) = 0$  である.  $\Gamma_s$  を  $F_s$  の双対グラフ\*3 とする. すなわち,  $\Gamma_s$  は  $S_0$  を頂点集合,  $S_1$  を辺集合とする多重無向グラフであり, 辺  $x \in S_1$  の端点は  $x$  を含む二つの既約成分である. ただし,  $x$  が一つの既約成分にしか含まれない場合,  $x$  はループになる.  $i \neq j$  のとき,  $C_i$  と  $C_j$  を結ぶ辺の数は  $(C_i, C_j) / \log \#k(s)$  であることに注意する.  $n$  次正方行列  $L$  を  $L = (-(C_i, C_j) / \log \#k(s))_{1 \leq i, j \leq n}$  で定義する\*4.

いま,  $\Gamma_s$  を電気回路と見なす. 各辺を抵抗値 1 の抵抗として,  $C_n$  を基準にした  $C_i$  の電位を  $V_i$  とする. 特に,  $V_n = 0$  である. 各頂点  $C_i$  に外部から  $I_i$  の電流を流すとする. ただし,  $\sum_{i=1}^n I_i = 0$  とする. 列ベクトル  $V$  と  $I$  を  $V = (V_i)$ ,  $I = (I_i)$  で定める. このとき, Ohm の法則と Kirchoff の法則から,  $I = LV$  が成り立つ.

$\Phi$  の定義から, 任意の  $i = 1, \dots, n$  に対して  $(\Phi, C_i) = (D_x - D, C_i)$  である.  $\Phi = \sum_C \Phi(C) \cdot C$  だから,  $(\Phi, C_i) = \sum_{j=1}^n (C_i, C_j) \Phi(C_j)$  である. よっ

\*3  $F_s$  の双対グラフには別の定義もある. ここで述べた定義は [13, Definition 10.3.17] にあり, ループを含めない定義が [13, Definition 10.1.48] にある.

\*4  $L$  は  $\Gamma_s$  からループを除いてできるグラフの Laplacian (または Laplace 行列) である. グラフの Laplacian の定義は多くの教科書にあるが, 多重グラフの場合は [2, Section 1.1] を参照されたい.

て,  $\Gamma_s$  に流す電流を  $I_i = (D - D_x, C_i) / \log \#k(s)$  で定めれば,  $I = LV$  より,  $V_i = \Phi(C_i)$  が成り立つ. 辺の数  $\#S_1 = \delta_s$  を固定したとき,  $|\Phi(C)|$  が最大になる場合は,  $\Gamma_s$  が道<sup>\*5</sup>であり,  $D$  と  $D_x$  のすべての成分がそれぞれ  $\Gamma_s$  の始点と終点に対応する既約因子と交わる場合である. このとき, 電位差の絶対値の最大値は  $g\delta_s$  である. よって,  $A_s = \sup_C |\Phi(C)| \leq g\delta_s$  が成り立つ.  $\square$

注意 10.3.14. P. Bruin の学位論文 [3] において, 本稿で述べた評価を含め, [6] の結果の一般化が行われている. [3] の証明では Faltings の  $\delta$  不変量を用いなくなっており, 算術的 Noether の公式は不要になっている.

## 謝辞

本サマースクールの世話人である木村巖氏, 横山俊一氏には準備段階から報告集作成に至るまで多大なご助力を頂きました. 厚く御礼申し上げます. また, 同志社大学の川口周氏には Arakelov 理論に関して有益なご助言を頂きました. 深く感謝いたします.

---

<sup>\*5</sup> 頂点集合  $\{p_1, \dots, p_n\}$  と辺集合  $\{\{p_i, p_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$  を持つグラフを道 (path) という. 直観的には, 頂点と辺が一直線状に並んでいるグラフが道である. [6, Lemma 9.2.6] の証明ではこれを chain と呼んでいる.

## 参考文献

- [1] S. Ju. Arakelov, Intersection theory of divisors on an arithmetic surface, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **38** (1974), 1179–1192 (Russian); English transl., *Math. USSR Izv.* **8** (1974), 1167–1180.
- [2] A. E. Brouwer and W. H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Universitext, Springer, New York, 2012.
- [3] P. Bruin, Modular curves, Arakelov theory, algorithmic applications, Ph.D. thesis, Universiteit Leiden, 2010.
- [4] P. Bruin, Bornes optimales pour la différence entre la hauteur de Weil et la hauteur de Néron-Tate sur les courbes elliptiques sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , *Acta Arith.* **160** (2013), 385–397.
- [5] B. Conrad, *Grothendieck Duality and Base Change*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1750, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [6] B. Edixhoven and J.-M. Couveignes (eds.), *Computational Aspects of Modular Forms and Galois Representations*, Annals of Mathematics Studies, No. 176, Princeton University Press, Princeton, 2011, [arXiv:math/0605244](https://arxiv.org/abs/math/0605244) [math.NT].
- [7] G. Faltings, Calculus on arithmetic surfaces, *Ann. of Math. (2)* **119** (1984), 387–424.
- [8] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [9] M. Hindry and J. H. Silverman, *Diophantine Geometry: An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [10] 木村巖, モジュラー形式に付随する 2 次元法  $l$  Galois 表現の計算, 本報告集, 2018.
- [11] F. F. Knudsen and D. Mumford, The projectivity of the moduli space of stable curves. I. Preliminaries on “det” and “Div”, *Math. Scand.* **39** (1976), 19–55.
- [12] S. Lang, *Introduction to Arakelov Theory*, Springer-Verlag, New York,

- 1988.
- [13] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002.
  - [14] L. Moret-Bailly, Métriques permises, *Astérisque* **127** (1985), 29–87.
  - [15] L. Moret-Bailly, La formule de Noether pour les surfaces arithmétiques, *Invent. Math.* **98** (1989), 491–498.
  - [16] 森脇淳, アラケロフ幾何, 岩波数学叢書, 岩波書店, 東京, 2008.
  - [17] 森脇淳, 川口周, 生駒英晃, モーデル-ファルティングスの定理: デイオフアントス幾何からの完全証明, ライブラリ数理化学のための数学とその展開 AL1, サイエンス社, 東京, 2017.
  - [18] T. Saito, Conductor, discriminant, and the Noether formula of arithmetic surfaces, *Duke Math. J.* **57** (1988), 151–173.
  - [19] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer, Dordrecht, 2009.
  - [20] H. G. Zimmer, On the difference of the Weil height and the Néron-Tate height, *Math. Z.* **147** (1976) 35–51.