6.

楕円モジュラー形式の導入

木村 巌（富山大学）

6.1　イントロダクション

モジュラー形式，モジュラーシンボル，Hecke 環など基本的な対象を導入する．計算という観点から，それらが有限の情報で規定されるということに重点を置いて説明する．

記述の多くは Edixhoven-Couveignes [EC11] の 2 章に従っている．証明はほとんど省いた．同書のほか，モジュラー形式の理論の詳細については Diamond-Shurman [DS05], 計算という観点からの説明としては, Stein [Ste07] といった成書を参照していただきたい．また，モジュラー形式の様々な観点（古典的な関数論的な扱い，数論幾何的な扱い，表現論的な扱い）からの概説については Diamond-Im [DI95] を挙げる．

6.2　モジュラー群とモジュラー形式

■モジュラー群とモジュラー曲線　本稿で断りなく Γ と書いたら，ある正整数 N に対する以下のどれかとする：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &\coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; ad - bc = 1 \right\} \\
&\supset \Gamma_0(N) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \pmod{N} \right\} \\
&\supset \Gamma_1(N) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \;\middle|\; a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\} \\
&\supset \Gamma(N) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N) \;\middle|\; b \equiv 0 \pmod{N} \right\}.
\end{aligned}
$$

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群 G で，ある N に対して $G \supset \Gamma(N)$ となるような G を合同部分群という[*1]

また $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q}) \coloneqq \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) M_2(\mathbb{Q}) \;\middle|\; ad - bc > 0 \right\}$ とする．よく知られているように $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ は上半平面 $H \coloneqq \{\, z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0 \,\}$ ならびに $H \cup \mathbb{Q} \cup \{\, \infty \,\}$ に一次分数変換で作用する．Γ の H への作用は「真性不連続」な作用で，$Y(\Gamma) \coloneqq \Gamma \setminus H$ は 1 次元の複素多様体になる．$X(\Gamma)$ を $Y(\Gamma)$ のコンパクト化とする．$X(\Gamma)$ は，$Y(\Gamma)$ に「カスプ」の同値類を有限個付け加えることで得られる．$X(\Gamma)$ は閉リーマン面（コンパクトな 1 次元複素多様体）になり，よって $\mathbb{C}$ 上の代数曲線となる．

特に，正整数 N に対して $X_0(N) \coloneqq X(\Gamma_0(N))$, $X_1(N) \coloneqq X(\Gamma_1(N))$ とする．これらはそれぞれ $\mathbb{Z}$ 上，$\mathbb{Z}[1/N]$ 上など，整数環上のモデルを持つことも知られている．

$X_1(N)(\mathbb{C})$ は楕円曲線 $E_{/\mathbb{C}}$ とその上の位数 N の点 P の対 $(E_{/\mathbb{C}}, P)$ の，また $X_0(N)(\mathbb{C})$ は楕円曲線 $E_{/\mathbb{C}}$ とその上の位数 N の巡回部分群 C の対 $(E_{/\mathbb{C}}, C)$ のそれぞれ「モジュライ」[*2]である．

■モジュラー形式・カスプ形式　$M_k(\Gamma_1(N))N$, $M_k(\Gamma_0(N), \chi)N$ をそれぞれ $\Gamma_1(N)$, $\Gamma_0(N)$ に関する「モジュラー形式」の空間，また同じく，$S_k(\Gamma_1(N))$, $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ をそれぞれ $\Gamma_1(N)$, $\Gamma_0(N)$ に関する「カスプ形式」の空間とする．これらは有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間であり，それらの次元をモジュラー群の情報，k で与える「次元公式」がある．また $X_1(N)$, $X_0(N)$ 上の（高次）微分形式の空間としても解釈できる．

$\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \ni d$ の

$$\begin{aligned} &\langle d \rangle_k \colon M_k(\Gamma_1(N))N \to M_k(\Gamma_1(N))N, \\ &\langle d \rangle_k f = f|[\sigma_d]_k \end{aligned}$$

という作用で

$$M_k(\Gamma_1(N))N = \oplus_\chi M_k(\Gamma_1(N))N, \quad S_k(\Gamma_1(N)) = \oplus_\chi S_k(\Gamma_1(N))$$

という分解が得られる．直和はそれぞれ法 N の Dirichlet 指標を渡る．

■q 展開，Hecke 作用素　$f \in M_k(\Gamma_1(N))N$ はカスプ ∞ での Taylor 展開（q 展開）

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^n, \quad q = \exp(2\pi\sqrt{-1}z),\ z \in H \tag{6.1}$$

*1 工藤氏の論説参照.

*2 $\mathbb{C}$ 値点をとらずに定式化できる．また，粗モジュライ，精モジュライなど正確なことは割愛.

を持つ．$f \in S_k(\Gamma_1(N))$ なら $a_0(f) = 0$.

$f(z) \in S_k(\Gamma_1(N))$ と正整数 r に対して，$S_k(\Gamma_1(N))$ の線形変換 T_r を次で定め，r-th Hecke 作用素という[*3]：

$$(T_r f)(z) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} a_m(T_r f) q^n, \quad a_n(T_r f) = \sum_{0<d|n,(d,N)=1} d^{k-1} a_{\frac{rn}{d^2}}(\langle d\rangle_k f). \tag{6.2}$$

事実として，

1. T_r 達は可換,
2. $\mathbb{T}(k,N) \coloneqq \mathbb{Z}[T_1, T_2, \ldots, \langle a\rangle_k | a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times]$ は $T_1 = \mathrm{id}$, すべての素数 p に対する T_p, $\langle a\rangle_k$, $a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ で生成される,
3. 形式的な等式 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{T_m}{m^s} = \prod_p (1 - T_p p^{-s} + p^{k-1}\langle p\rangle_k p^{-2s})$ が成立,
4. $S_k(\Gamma_1(N)) \ni f \neq 0$ が，すべての $r > 0$ に対してある複素数 λ_r が存在して
$$T_r f = \lambda_r f \tag{6.3}$$
を満たすなら，$a_1(T_r f) = a_r(f) \neq 0$. （このような f を Hecke 固有形式という）．よって $a_1(f) = 1$ と正規化することができる．(6.3) を満たし $a_1(f) = 1$ であるものを，正規化された Hecke 固有形式という．
5. $L_f(s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) n^{-s}$ とすると $\Re s \gg 0$ で収束し正則関数を定める．これを f の L 関数という．f が正規化された Hecke 固有形式なら $L_f(s)$ は Euler 積を持つ[*4].

■Petersson 内積　$f, g \in S_k(\Gamma_1(N))$ とする．

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \frac{1}{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\colon \Gamma_1(N)} \int_{\Gamma_1(N)\backslash H} f(z)\overline{g(z)} y^k \frac{dx\,dy}{y^2}, \tag{6.4}$$
$$(z = x + \sqrt{-1}y \in H,\ x, y \in \mathbb{R}),$$

積分は $\Gamma_1(N)$ の H における任意の基本領域でとる（右辺は基本領域のとり方によらないことが示される）．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $S_k(\Gamma_1(N))$ の Hermite 内積を定める．この内積を，$S_k(\Gamma_1(N))$ 上の Petersson 内積という．

$T_m \in \mathbb{T}(k,N)$ は $(m,N) = 1$ なら正規作用素で，よって異なる固有空間は互いに Petersson 内積に関して直交する．

正整数 N とその約数 M, $d \mid N/M$ に対して，degeneracy map

$$B^*_{N,M,d}\colon S_k(\Gamma_1(M)) \to S_k(\Gamma_1(N))$$

[*3] intrinsic な定義があるが，割愛.
[*4] 工藤さんの論説参照.

を

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty}a_nq^{dn} \tag{6.5}$$

で定める.

$$S_k(\Gamma_1(N))^{\mathrm{old}} \coloneqq \bigcup_{M|N, M\neq N}\bigcup_{d|\frac{N}{M}} B^*_{N,M,d}S_k(\Gamma_1(M)),$$
$$S_k(\Gamma_1(N))^{\mathrm{new}} \coloneqq (S_k(\Gamma_1(N))^{\mathrm{old}})^{\perp}$$

とし，前者を old space, 後者を new space, さらに前者の元を old form, 後者の元を new form という.

■A-係数モジュラー形式　$A\subset\mathbb{C}$ を部分環とするとき,

$$M_k(\Gamma_1(N),A)\coloneqq\{\,f\in M_k(\Gamma_1(N)) \mid f \text{ の } q \text{ 展開の係数はすべて } A \text{ の元}\,\},$$
$$S_k(\Gamma_1(N),A)\coloneqq S_k(\Gamma_1(N))\cap M_k(\Gamma_1(N),A).$$

次の事実が知られている：

$$S_k(\Gamma_1(N),\mathbb{Z})\times\mathbb{T}(k,N)\ni(f,T_m)\mapsto a_1(T_mf)\in\mathbb{Z}$$

は完全なペアリング（[EC11, (2.4.9)]）.

■Strum の定理とその帰結　次の事実は「Strum の定理」として知られている

定理 6.2.1 ([EC11, (2.5.10)]). *$R\subset\mathbb{C}$ を DVR, $\mathfrak{m}$ を R の極大イデアル, $F=R/\mathfrak{m}$ とする. $f=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n\in S_k(\Gamma_1(N),R)$ が $a_n\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$, $1\le n\le (k/12)[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\colon\Gamma_1(N)]$ を満たすならば，任意の $n\ge 1$ に対して $a_n\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$.*

応用として，Hecke 環の有限性が従う：

系 6.2.2 ([EC11, (2.5.11)]). *$\mathbb{T}(k,N)$ は $r\le(k/12)[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\colon\Gamma_1(N)]$ なる r に対する T_r により $\mathbb{Z}$ 加群として生成される.*

6.3 モジュラーシンボル, Manin シンボルとカスピダルモジュラーシンボル

この節の目的は次の 3 つである．モジュラーシンボルの空間を導入し，その有限生成系として Manin シンボルを導入する．カスピダルモジュラーシンボルの空間を導入し，カスプ形式の空間との関係を説明する．そして，カスピダルモジュラーシンボルの空間は Manin シンボルによって有限の手続きで計算できることを示す.

■議論の流れ　モジュラーシンボルの定義については，定型的な議論が多いので，先に概要を示しておこう．まず，Γ が上述の群のときに，重さ 2 のモジュラーシンボルの空間 $\mathbb{M}_2(\Gamma)$ を定義する．それに，$k-2$ 次の $\mathbb{Z}$ 係数 2 変数斉次多項式の加群 $\mathbb{Z}[x,y]_{k-2}$ を $\mathbb{Z}$ 上テンソルしたものを $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ と定義する．

次に，重さ 2 のバウンダリーシンボルの空間 $\mathbb{B}_2(\Gamma)$ を定義する．それに，$k-2$ 次の $\mathbb{Z}$ 係数 2 変数斉次多項式の加群 $\mathbb{Z}[x,y]_{k-2}$ を $\mathbb{Z}$ 上テンソルしたものを $\mathbb{B}_k(\Gamma)$ と定義する．

境界作用素 $\delta\colon \mathbb{M}_k(\Gamma) \to \mathbb{B}_k(\Gamma)$ を定義し，最後にその核として，カスピダルモジュラーシンボルの空間 $\mathbb{S}_k(\Gamma)$ を定義する．

ここまで現れた $\mathbb{M}_k(\Gamma), \mathbb{B}_k(\Gamma), \mathbb{S}_k(\Gamma)$ はいずれも Hecke 環上の加群である．$\mathbb{M}_k(\Gamma)$ は有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群であり，Manin シンボルと呼ばれる有限個の生成系を具体的に構成する．また，$\mathbb{B}_k(\Gamma)$ も有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群であり，その有限生成系を具体的に構成する．

群 Γ が $\Gamma_0(N)$ のときには，指標付きでも議論できる．

定義 6.3.1. A を，次のように定義される自由 Abel 群とする：

$$A \coloneqq \left\langle \left\{ \{\alpha,\beta\} \;\middle|\; \alpha,\beta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \right\} \right\rangle.$$

また，I を A の部分群で，次のように定義されるものとする：

$$I \coloneqq \left\langle \left\{ \{\alpha,\beta\}+\{\beta,\gamma\}+\{\gamma,\alpha\}, \{\alpha,\beta\}+\{\beta,\alpha\}, \{\alpha,\alpha\} \;\middle|\; \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \right\} \right\rangle.$$

このとき，$\mathbb{M}_2$ を

$$\mathbb{M}_2 \coloneqq (A/I)/(A/I)_{\mathrm{tor}}$$

と定義する．記号を濫用して $\{\alpha,\beta\}$ で $\{\alpha,\beta\} \in A$ が代表する $\mathbb{M}_2$ の同値類も表すことにする．

$g \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ が，α,β それぞれに対する一次分数変換で作用することが確認できる．

整数 $k \geq 2$ に対して，$k-2$ 次の $\mathbb{Z}$ 係数 2 変数斉次多項式の加群を $\mathbb{Z}[x,y]_{k-2}$ と表す．$P(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]_{k-2}$ に対して，$g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$ でさらに整数係数である g が次のように作用する：

$$(gP)(x,y) \coloneqq P(dx-by, -cx+ay).$$

整数 $k \geq 2$ に対して，$\mathbb{M}_k$ を

$$\mathbb{M}_k \coloneqq \mathbb{Z}[x,y]_{k-2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{M}_2$$

と定義する．$\mathbb{M}_k$ には $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が対角的に作用する．

定義 6.3.2 (モジュラーシンボル). 整数 $k \geq 2$ と $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して，重さ k の Γ に関するモジュラーシンボルの空間 $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ を

$$\mathbb{M}_k(\Gamma) \coloneqq ((\mathbb{M}_k)_\Gamma)/((\mathbb{M}_k)_\Gamma)_{\mathrm{tor}} \tag{6.6}$$

と定義し，その元を重さ k の Γ に関するモジュラーシンボルという.

ただし，G が群，M が G-加群のとき，M_G は M の G-coinvariants, すなわち，M の最大の G 不変商を表す．具体的には，M_G は次のように与えられる：

$$M_G \coloneqq M/\langle gm - m \,|\, g \in G, m \in M \rangle .$$

定義 6.3.3 (バウンダリーモジュラーシンボル). バウンダリーモジュラーシンボルの空間 $\mathbb{B}_2$ を，$\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ が生成する自由アーベル群とする：

$$\mathbb{B}_2 \coloneqq \left\langle \{\,\alpha\,\} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \right\rangle .$$

$\mathbb{B}_2$ には $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が一次分数変換で作用する：$g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\{\,\alpha\,\} \in \mathbb{B}_2$ にたいして

$$g\{\,\alpha\,\} \coloneqq \{\,g\alpha\,\} .$$

さらに，整数 $k \geq 2$ に対して，重さ k のバウンダリーモジュラーシンボルの空間 $\mathbb{B}_k$ を

$$\mathbb{B}_k \coloneqq \mathbb{Z}[x,y]_{k-2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}_2$$

と定義する．$\mathbb{B}_k$ には $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が対角的に作用する.

最後に，整数 $k \geq 2$ と群 Γ に対して，重さ k の Γ に関するバウンダリーモジュラーシンボルの空間 $\mathbb{B}_k(\Gamma)$ を次で定義する：

$$\mathbb{B}_k(\Gamma) \coloneqq (\mathbb{B}_k)/(\mathbb{B}_k)_{\mathrm{tor}}.$$

定義 6.3.4 (カスピダルモジュラーシンボル). 整数 $k \geq 2$ に対して，重さ k のモジュラーシンボルの空間から重さ k のバウンダリーモジュラーシンボルの空間への境界作用素

$$\delta\colon \mathbb{M}_k(\Gamma) \to \mathbb{B}_k(\Gamma)$$

を

$$\delta(P \otimes \{\,\alpha, \beta\,\}) \coloneqq P \otimes \{\,\alpha\,\} - P \otimes \{\,\beta\,\}$$

と定義する．これは Γ 加群の射である.

整数 $k \geq 2$ に対して，重さ k のカスピダルモジュラーシンボルの空間 $\mathbb{S}_k(\Gamma)$ を，連結準同型 δ の核として定義する：

$$\mathbb{S}_k(\Gamma) \coloneqq \ker(\delta\colon \mathbb{M}_k(\Gamma) \to \mathbb{B}_k(\Gamma)).$$

定理 6.3.5. 上の記号で，次のペアリングは完全である：

$$\begin{aligned}&\mathbb{S}_k(\Gamma_1(N))\otimes\mathbb{C}\times(S_k(\Gamma_1(N))\times\overline{S_k(\Gamma_1(N))})\to\mathbb{C},\\&(P\otimes\{\,\alpha,\beta\,\},f\oplus g)\mapsto 2\pi\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta f(z)P(z,1)dz-g(z)P(\overline{z},1)d\overline{z}.\end{aligned}$$

定義 6.3.6. カスピダルモジュラーシンボルの空間 $\mathbb{S}_k(\Gamma)$ 上のインヴォリューション $\iota^*\colon\mathbb{S}_k(\Gamma)\to\mathbb{S}_k(\Gamma)$ を

$$\iota^*(P(x,y)\otimes\{\,\alpha,\beta\,\})=-P(x,-y)\otimes\{\,-\alpha,-\beta\,\}$$

で定義する．このインヴォリューションが $+1$ で作用する固有空間，-1 で作用する固有空間をそれぞれ $\mathbb{S}_k^+(\Gamma)$, $\mathbb{S}_k^-(\Gamma)$ と表す．

定理 6.3.7. 上記の記号で次のペアリングは完全である：

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_k^+(\Gamma)\otimes\mathbb{C}\times S_k(\Gamma_1(N))\to\mathbb{C},\\\mathbb{S}_k^-(\Gamma)\otimes\mathbb{C}\times\overline{S_k(\Gamma_1(N))}\to\mathbb{C}.\end{aligned}$$

定理 6.3.8. Hecke 環 $\mathbb{T}_k(\Gamma_1(N))$ が $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(N))$ に作用しており，$\mathbb{S}_k^+(\Gamma_1(N))$, $\mathbb{S}_k^-(\Gamma_1(N))$ を保つ．さらに定理 6.3.7 のペアリングを $\langle\cdot|\cdot\rangle$ と書くと，$T\in\mathbb{T}_k(\Gamma_1(N))$, $x\in\mathbb{S}_k^+(\Gamma_1(N))$, $f\in S_k(\Gamma_1(N))$ に対して，

$$\langle Tx|f\rangle=\langle x|Tf\rangle\,.$$

■ 以上で，カスプ形式の空間 $S_k(\Gamma_1(N))$ の計算を $\mathbb{S}_k^+(\Gamma_1(N))$ の計算に帰着した．しかし，定義 6.3.4 を見ただけでは，有限生成かも分からず，計算機に載せようがない．この問題を解決するために，Manin シンボルと呼ばれる $\mathbb{S}_k^+(\Gamma_1(N))$ の具体的な有限生成系を導入する．

6.4 Manin シンボル

命題 6.4.1. 正整数 N に対して E_N を次で定義する：

$$E_N\coloneqq\left\{\,(c,d)\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2\;\middle|\;\gcd(c,d,N)=1\,\right\}.$$

このとき，次の全単射が存在する：

$$\Gamma_1(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\ni\overline{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)}\leftrightarrow(\overline{c},\overline{d})\in E_N.$$

命題 6.4.2. $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(N))$ は，$[\frac{a}{c},\frac{b}{d}]$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $ad-bc=1$ という形の元で生成される．($\frac{\cdot}{0}=\infty$ とする)．

注意 6.4.3. $\mathbb{Q}$ 上のカスプにおける連分数展開により，$\mathbb{M}_2$ の元を上の形に書くことができる．

$\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\{\infty, 0\}$ により，$\mathbb{M}_2$ の元は $\gamma\{\infty, 0\}$ の整数係数の有限線型和で表すことができる（$\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$）．また，$\gamma\{\infty, 0\} = \gamma'\{\infty, 0\}$ であることも確かめられる．

定義 6.4.4 (Manin シンボル). 命題 6.4.1 の対応で $(c, d) \in E_N$ と対応する $\gamma \in \Gamma_1(N)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ により $\gamma\{\infty, 0\}$ と表される $\mathbb{M}_2(\Gamma_1(N))$ の元を重さ 2 の Manin シンボルという．これが $\mathbb{M}_2(\Gamma_1(N))$ の有限生成系である：

同様に，$\mathbb{M}_k(\Gamma_1(N))$ の有限生成系として次の形の元が取れる：

$$\left\{ x^i y^{k-2-i} \otimes \gamma\{\infty, 0\} \;\middle|\; \gamma \in E_N,\, 0 \geq i \geq k-2 \right\}.$$

この集合の元を重さ k の Manin シンボルという．

Manin シンボルたちの間の関係式も明示的に書き下すことができる．

命題 6.4.5 (Merel [Mer94]). 正整数 N と 2 以上の整数 k を固定する．$\mathbb{Q}[\Gamma_1(N)\backslash\mathbb{Q}^2]$ 上の関係 $\sim$ を，次のように定義すると，これは同値関係になる（$\lambda \in \mathbb{Q}^\times$, $x \in \mathbb{Q}^2$）：

$$[\overline{\lambda x}] \sim \mathrm{sgn}(\lambda)^k [\overline{x}].$$

さらに，$a, b \in \mathbb{Z}$ が互いに素なときに，写像 μ を次のように定義する：

$$\mu \colon \mathbb{B}_k(\Gamma_1(N)) \ni P \otimes \left\{ \frac{a}{b} \right\} \mapsto P(a, b)\left[\overline{\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)}\right] \in \mathbb{Q}[\Gamma_1(N)\backslash\mathbb{Q}^2]/\sim.$$

すると μ は well-defined で単射である．

命題 6.4.6. 上の記号で，$\mathbb{S}_k(\Gamma_1(N))$ は次の射の核であり，それぞれの明示的な有限生成系により計算することができる：

$$\mathbb{S}_k(\Gamma_1(N)) = \ker(\mu \circ \delta \colon \mathbb{M}_k(\Gamma_1(N)) \to \mathbb{Q}[\Gamma_1(N)\backslash\mathbb{Q}^2]/\sim).$$

参考文献

[DI95] Fred Diamond and John Im, *Modular forms and modular curves*, Seminar on Fermat's Last Theorem (Toronto, ON, 1993–1994), CMS Conf. Proc., vol. 17, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 39–133. MR 1357209

[DS05] Fred Diamond and Jerry Shurman, *A first course in modular forms*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 228, Springer-Verlag, New York, 2005. MR 2112196 (2006f:11045)

[EC11] Bas Edixhoven and Jean-Marc Couveignes (eds.), *Computational aspects of modular forms and Galois representations*, Annals of Mathematics Studies, vol. 176, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011, How one can compute in polynomial time the value of Ramanujan's tau at a prime. MR 2849700

[Mer94] Loï c Merel, *Universal Fourier expansions of modular forms*, On Artin's conjecture for odd 2-dimensional representations, Lecture Notes in Math., vol. 1585, Springer, Berlin, 1994, pp. 59–94. MR 1322319

[Ste07] William Stein, *Modular forms, a computational approach*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 79, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007, With an appendix by Paul E. Gunnells. MR 2289048 (2008d:11037)