第13回　杭基礎の支持力計算の例

原　隆史*

1. 信頼性設計計算法

ここでは，信頼性設計の簡易的な概算手法と近年のパソコンの発達から信頼性設計で主流となりつつあるモンテカルロシミュレーション（Monte Carlo Simulation，以下MCSと呼称）を用いた具体的な計算例を示す。

始めに，ここで取扱う計算法について簡単に述べる。

簡易的な概算手法とは，荷重や抵抗（応答と限界値）の両方を正規分布と仮定して信頼性を推定する手法（以下，簡易法と呼称）であり，最近でも用いられることが少なくない。これは正規分布と仮定することでクローズドフォームがあり，荷重と抵抗の両方が標準正規分布の場合は式(1)，対数正規分布の場合は式(2)で簡易に信頼性指標を推定でき，概算の信頼性を知るうえで便利なためである。また，信頼性指標が分かれば，破壊確率も式(3)で求めることができる。ただし，正規分布で近似させるところが概算であるゆえんであり，厳密解を得る必要がある場合には別途検討する必要がある。AASHTO（LRFD）でも多くの信頼性解析がこれによるが，詳細検討が必要な場合にはMCSによることとしている[1]。

$$\beta=\frac{\overline{R}-\overline{S}}{\sqrt{\sigma_R{}^2+\sigma_S{}^2}} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\beta=\frac{LN\left[\dfrac{\overline{R}}{\overline{S}}\sqrt{\dfrac{1+COV\sigma_S{}^2}{1+COV_R{}^2}}\right]}{\sqrt{LN\left[(1+COV\sigma_S{}^2)(1+COV_R{}^2)\right]}} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$P_f=1-\phi(\beta) \quad \cdots\cdots(3)$$

ここに，

β：信頼性指標

$\overline{R}, \overline{S}$：抵抗強度と荷重強度の平均値

σ_R, σ_S：抵抗強度と荷重強度の標準偏差

COV_R, COV_S：抵抗強度と荷重強度の変動係数

P_f：破壊確率

$\phi(\beta)$：正規分布関数（エクセルの関数は“NORMDIST”）

次にMCSとは，任意の確率変数からランダムに値を抽出し計算を行うもので，確率変数の数や分布および第3回の講座（平成25年12月号）で解説した性能関数の線形/非線形にかかわらず，必要な回数の計算を行えば厳密な解を得ることができる方法である。以前は多くの回数を計算することが困難であったため，複雑な確率計算によらざるを得なかったが，近年のパソコンの発達から非常に簡易に行えるようになり，今後の信頼性設計計算法の主流になると考えられている。

MCSにおける必要計算回数については次項で具体的に述べる。

2. 計算例

具体的な信頼性設計の例として，図-1に示す1本の杭の杭軸方向押込み支持力の信頼性を計算する。

ここで杭は，径が1.0m，長さ11.0mの場所打ち杭であり，先端1.0mが支持層に根入れされている。中間層は砂質土層で，平均N値は15である。杭先端の極限支持力度を3,000kN/m²，極限周面摩擦力度をN値から推定（5N）するとすれば，この杭の極限押込み支持力は，式(4)から4,710kNと推定される。

$$R_u=q_d\cdot A+U\cdot L\cdot f \quad \cdots\cdots(4)$$

ここに，

R_u：極限押込み支持力（kN）

q_d：杭先端の極限支持力度（kN/m²）

A：杭先端の面積（m²）

U：杭の周長（m）

L：周面摩擦力を考慮する層の厚さ（m）

f：杭周面の極限摩擦力度（kN/m²）

杭の極限押込み支持力評価のばらつきとしては，多くの杭の鉛直載荷試験と式(1)で示した支持力式との比較から，以下の値（載荷試験/支持力式）が得られているものとする。

平 均 値：0.94

標準偏差：0.276

一方押し込み力は1,500kNで，ばらつきは以下のとおりとする。

平 均 値：1.0

標準偏差：0.2

なお，これらのばらつきは，支持力は標準正規分布と対数正規分布の両方を対象とし，押込み力は標準正規分布として計算する。

支持力と押込み力の両方を標準正規分布とした場合の

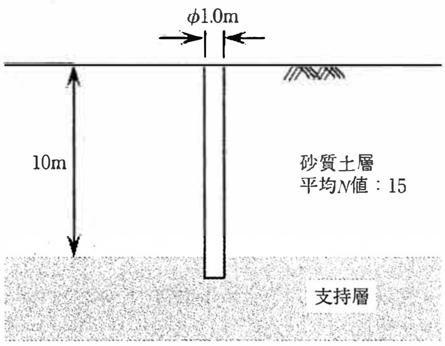

図-1　計算モデル

＊HARA Takashi　岐阜大学 工学部 特任教授｜岐阜市柳戸1－1

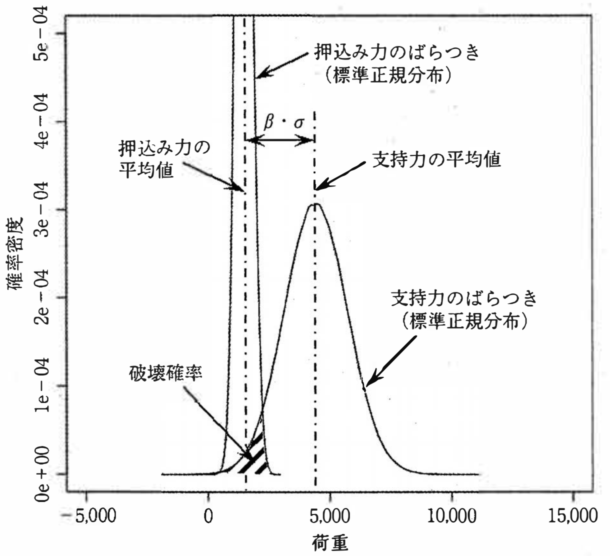

図-2　支持力のばらつきを標準正規分布とした結果

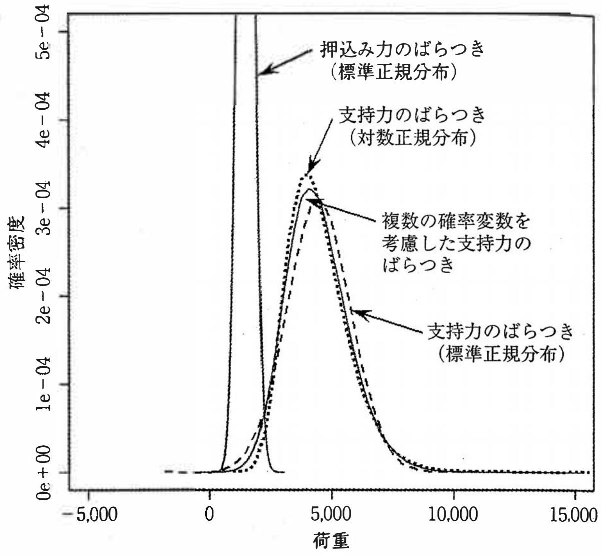

図-3　確率変数に応じた支持力のばらつきの比較

簡易法による信頼性は，性能関数を式(5)として式(6)，(7)から，信頼性指標は2.2，破壊確率は1.4%と推定される。この結果を視覚的に**図-2**に示す。ここで，押込み力と支持力のばらつきの交わる斜線部分が破壊確率である。また，図中のσは支持力と押込み力の平均的な標準偏差で，式(8)から算出する。

$$g=R-S=R_u\cdot\delta_{Ru}-V\cdot\delta_V\geq 0 \quad\cdots\cdots(5)$$

$$\beta=\frac{\bar{R}-\bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}}=\frac{4,427-1,500}{\sqrt{1,299^2+300^2}}=2.20 \quad\cdots\cdots(6)$$

$$P_f=1-\phi(\beta)=0.014 \quad\cdots\cdots(7)$$

$$\sigma=\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2} \quad\cdots\cdots(8)$$

ここに，

R，S：ばらつきを考慮した抵抗強度と荷重強度

δ_{Ru}, δ_V：支持力と押込み力のばらつき（確率変数）

V：押込み力（kN）

支持力を対数正規分布とした場合の信頼性は以下に結果のみを示し，支持力のばらつきは**図-3**に示す。

信頼性指標　(β)：3.14

破 壊 確 率　(P_f)：0.083%

次に，押込み支持力のばらつきが全体としてはそのままに，将来的に**表-1**に示すように分解できた場合を考える。この場合の性能関数は式(5)のとおりとなり，複数の確率変数を取扱うため，ここではMCSにより信頼性を推定する。

$$g=R-S=R_u\cdot\delta_{Ru}-V\cdot\delta_V$$
$$=q_d\cdot\delta_{TM}\cdot A+U\cdot L\cdot f\cdot\delta_N\cdot\delta_{fN}\cdot\delta_{fM}-V\cdot\delta_V\geq 0 \quad\cdots\cdots(5)$$

ここに，

δ_{TM}：先端支持力のモデル誤差

δ_N：N値のばらつき

δ_{fN}：N値から周面摩擦力度への変換誤差

δ_{fM}：周面摩擦力のモデル誤差で，いずれも確率変数

表-1　押込み支持力の構成要因のばらつき

	平均値	標準偏差	分布形状
先端支持力のモデル誤差	0.8	0.25	正規分布
N値のばらつき	1.0	0.15	正規分布
N値から周面摩擦力度への変換誤差	1.2	0.3	正規分布
周面摩擦力のモデル誤差	0.9	0.3	正規分布

MCS（10^6回）の結果によると，信頼性の結果は以下のとおりである。

信頼性指標　(β)：2.57

破 壊 確 率　(P_f)：0.51%

この結果から，抵抗強度（R）の平均値（4,427kN）と標準偏差（1,299kN）は同じだが，ばらつきの分解が可能な場合の非線形性を考慮することにより，得られる信頼性が異なることが分かる。これらの違いは，支持力全体を標準正規分布や対数正規分布とした場合と視覚的に比較したものを**図-3**に示すが，複数の確率変数を有する支持力のばらつきが両者の中間的なものとなっていることから生じている。

このようなMCSの計算は，近年いろいろな信頼性解析のためのツールがあるので，非常に簡単に行うことができる。例えば，現在世界的に普及しつつあるフリーの信頼性解析ツール「R」[例えば2)]を用いたここでの例題の計算内容を**図-4**に示す。ここで，「#」はコメントで計算とは無関係のため，例題程度であればわずか18行で計算することができる。

計算内容を説明する前に，MCSという計算のイメージについて述べる。確率変数ごとに箱があり，この中にはMCSの計算回数分の確率変数に対応した値が書かれているボールが入っており，毎回その中から1つのボールを無造作に取り出して計算を行う。これを計算回数分

```
#★設計条件
n.MCS <- 1000000                                    #1
QD <- 3000                                          #2
DMT <- rnorm (n.MCS, 0.8, 0.25)                     #3
A <- 0.785                                          #4
U <- 3.14                                           #5
L <- 10                                             #6
F <- 75                                             #7
DN <- rnorm (n.MCS, 1.0, 0.15)                      #8
DF <- rnorm (n.MCS, 1.2, 0.3)                       #9
DMF <- rnorm (n.MCS, 0.9, 0.3)                      #10
V <- 1500                                           #11
DV <- rnorm (n.MCS, 1.0, 0.2)                       #12
#★荷重の計算
VV <- V*DV                                          #13
#★抵抗の計算
RU <- QD*DMT*A+U*L*F*DN*DF*DMF                      #14
#★性能関数を満足しない回数
Count <- length (which (RU-VV <=0))                 #15
#★Pfとβの計算
Pf <- Count/n.MCS                                   #16
Beta <- -1*qnorm (Pf, 0, 1)                         #17
#★計算結果（Pfとβ）のアウトプット
Pf ; Beta                                           #18
```

図-4 「R」による例題の計算内容

繰り返し，最後に性能関数を満足しない回数を計算回数で除すことで破壊確率が計算される。非常に単純で明快な計算方法である。

なお，MCSの計算回数については，上記で述べたようなMCSの特性上，計算のたびに解が若干変化することを考慮し，得たい破壊確率の桁の数値が変化しない程度に設定する。具体的には，ここでの計算では10^{-4}（0.51%）までの破壊確率を計算しているので，計算回数は10^6（百万）回としている。

さて，具体的な計算内容について，各行のコメント番号ごとに次のとおりである。

#1：MCSの計算回数（ここでは百万回）
#2：杭先端の極限支持力度
#3：杭先端支持力のモデル誤差について，平均値0.8，標準偏差0.25の標準正規分布に対応した，MCSの計算回数分の値
#4～#7：杭先端の断面積，杭の周長，周面摩擦を考慮する中間層の厚さ，杭の極限周面摩擦力度
#8～#10：*N*値のばらつき，*N*値から周面摩擦力度への変換誤差，周面摩擦力のモデル誤差の各確率変数に対応した，MCSの計算回数分の値
#11：押込み力
#12：押込み力の確率変数に対応した，MCSの計算回数分の値
#13：計算1回分の荷重の算出
#14：計算1回分の抵抗の算出
#15：性能関数を満足しない（抵抗から荷重を差し引いた値が負となる）回数
#16：性能関数を満足しない回数をMCSの計算回数で除し，破壊確率（P_f）を計算
#17：正規分布関数により信頼性指標（β）を計算
#18：計算結果（P_fとβ）のアウトプット

具体的な計算は，ウェブより「R」をダウンロードしてインストールし，立ち上げた画面に図-4のテキストをコピー・ペーストすることで瞬時に計算が始まり終了する。

最後に，ここでの計算結果によると，支持力のばらつき評価でβが1程度異なり，ばらつき評価の重要性と影響の大きさに頭を悩ませる方がいるかもしれない。確かにばらつき評価は重要だが，ここでの例では大きな信頼性の中での差（破壊確率の差は小さい）であるとともに，組杭を基本とする杭基礎は冗長性（リダンダンシー）の大きな構造物であり，1本の杭のβが2.3で杭基礎としてのβは3.5に相当するという報告[1]もあり，ここでの結果はいずれも構造物に求められる性能を満足する杭基礎の信頼性を有しているものと考える。

3. おわりに

ここでは，簡易法とMCSを用いて，抵抗と荷重とのばらつきに応じた信頼性の計算例を示した。信頼性の計算というと，難解な式を思い浮かべる方が多いと思うが，ここで示した概算は簡易法，厳密解はMCSといった実務的な手法を用いれば，「信頼性は難しくていやだ」という想いを払拭していただけるのではないかと考える。

なお，応答を動的解析やFEMなどで計算を行う場合の信頼性解析の実用性に疑問をお持ちの読者も多いのではないかと考える。この場合も「応答曲面法[3]」という方法を用いることにより，実用的な回数の解析からMCSで信頼性を推定することができる。これについては，また別の機会で報告する。

参考文献

1) Tony M. Allen, Andrzej S. Nowak & Richard J. Bathurst : Calibration to Determine Load and Resistance Factors for Geotechnical and Structural Design, 2005.
2) http://www.kkaneko.com/rinkou/r/rinstall.html
3) Honjo, Y. : Challenges in geotechnical reliability based design, Proc. of the 3rd Int. Symp. on Geotechnical Safety and Risk, 11-27, 2011.