

格子ボルツマン法の発展

Progress in Lattice Boltzmann Method

瀬 田 剛**
SETA Takeshi

Abstract We review the recent progress and successful applications of lattice Boltzmann method (LBM) to computational fluid dynamics. To clarify the important issue in the LBM simulation, this report shows the recent progress in the LBM, and summarizes both the advantages and disadvantages of the LBM. We also discuss the immersed boundary-lattice Boltzmann method (IB-LBM) that has received much attention in recent years. Due to the common feature of using the Cartesian mesh, the IB-LBM successfully calculates the rigid particle motions in a viscous fluid. We present one of key issues in the IB-LBM, and examine the applicability of the Immersed Boundary Method to the lattice kinetic scheme (LKS) for particulate flow.

Keywords: Lattice Boltzmann Method, Computational Fluid Dynamics, Immersed Boundary Method, Lattice Kinetic Scheme

1. 緒 言

1988年にMcNamaraとZanetti[1]によって提案された格子ボルツマン法(Lattice Boltzmann Method, LBM)は、単一緩和時間モデル[2]の登場により、数値流体力学(Computational Fluid Dynamics, CFD)の分野で急速に普及した。混相流モデル、乱流モデル、熱流動モデル等多数の計算手法が開発され、詳細は、Qianら[3]、Chenら[4,5]、Succi[6]らによるレビュー論文等に掲載されている。国内でも、様々な学会誌で、LBMの特集記事[7-9]が生まれ、LBMに関する書籍も出版された[10-12]。10年前は、三次元計算や実用的な流れ解析が不足していたが[7]、現在では、応用計算が主流となり、商用ソフトも開発されている。例えば、エクサ・ジャパン(株)から提供されているPowerFLOWは、LBMに基づき乱流、熱流動現象の解析が可能な商用ソフトであり、BMWを初めとした多くの自動車メーカーで流体解析に使用されている(<http://www.exajapan.jp/>)。Fig. 1は、PowerFLOWによる詳細形状を使用し

た床下流れの計算例を示しており、LBMに乱流モデルを組み込むことで高レイノルズ数領域における車両周りの流れの実用的な計算を再現している。また、LBMは並列性能に優れていることから、膨大なコア数を有するGPGPU(General-purpose computing on graphics processing units)による並列処理に適している。エヌビディア(株)(<http://www.nvidia.co.jp/>)のWebサイトで

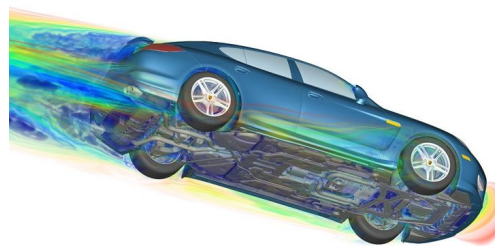


Fig. 1 Simulation of underbody flow with PowerFLOW. Image courtesy of Exa Japan Inc. and Porsche.

* 2010.10.25 受付

** 富山大学理工学研究部(工学) 〒930-8555 富山県富山市五福 3190
TEL: (076)445-6811 FAX: (076)445-6811 E-mail: seta@eng.u-toyama.ac.jp

も LBM の適用事例とアルゴリズムが詳しく紹介され、CUDA に関する書籍にも LBM による計算事例が示されている[13]。以上のように LBM は、Navier Stokes (NS) 方程式を時間と空間に対し二次精度で解析できる CFD 手法として利用されている。本報では、LBM の未解決の問題を整理すると共に、今日盛んに研究されている埋め込み境界法 (Immersed Boundary Method, IBM) [14] を LBM に適用した Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method (IB-LBM) についても言及する。

2. 格子ボルツマン法

LBM では、Fig. 2 (a) に示される離散速度 c_i に対応した分布関数 f_i が、

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta_t, t + \delta_t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau_v} \quad (1)$$

に従い、離散速度方向に時間発展することで、系全体の巨視的な挙動が再現される。平衡分布関数 f_i^{eq} は次式で定義される。

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left(1 + \frac{3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c^2} \right) \quad (2)$$

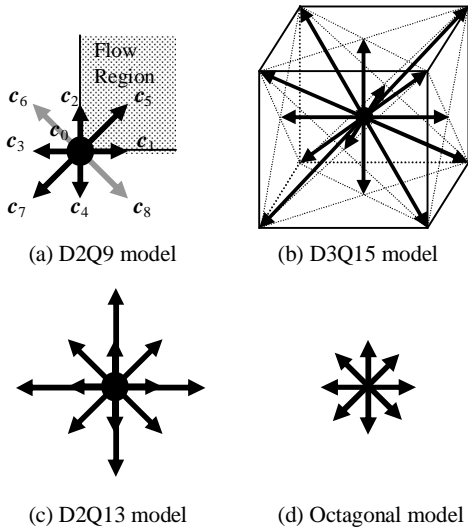


Fig. 2 Schematic of discrete velocity.

ここで、 c は離散速度の大きさ、 w_i は重み係数を表し、Fig. 2 (a) に示される D2Q9 モデルに対し、 $w_0 = 4/9$ 、 $w_{1-4} = 1/9$ 、 $w_{5-8} = 1/36$ である。密度 ρ と速度 \mathbf{u} は、

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_i f_i \mathbf{c}_i, \quad (3)$$

で定義される。式(1)にマルチスケール展開を適用することにより、連続の式、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

と NS 方程式、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (5)$$

が導出される。圧力と動粘性係数は、

$$p = \frac{\rho c^2}{3}, \quad \nu = \frac{1}{3} \left(\tau_v - \frac{1}{2} \right) c^2 \delta_t, \quad (6)$$

で与えられる。LBM では流速、圧力を直接計算せず、式(1)の線形な運動方程式に基づき分布関数 f_i を計算するだけで、非線形な NS 方程式が解析される。

LBM の利点として、(1) 複雑な二相界面を容易に扱える、(2) マルチスケール展開を用いると、LBM の発展方程式の線形な対流過程から、NS 方程式の非線形な対流過程を導出できる、(3) 質量、運動量の保存に優れている、(4) 最小限の速度数しか用いないため単純な代数計算のみによって粒子速度分布関数からマクロ変数に変換される、(5) 仮想的な粒子に対する分布関数が、格子上を局所的に時間発展するため並列計算性能に優れている、(6) バウンズバック・スキームにより複雑な境界条件を簡単に扱える、(7) 時間と空間に対し二次精度を有する、(8) ポアソン方程式の反復計算が不要であることなどが挙げられる。LBM が CFD として普及した一番の要因は、アルゴリズムの簡潔さ、つまりコーディングの容易さである。例えば、Fig. 3 に示される複雑な界面挙動を示す自発的相分離の計算も、拡散界面モデル (Diffuse-Interface Model, DIM) [15] を適用し、衝突項と平衡分布関数を変更するだけで、簡単に実施できる[16]。

一方、LBM が有する問題点を列挙すると、(1) 角の境界条件の設定、(2) 多速度モデルの境界条件の設定、(3) 外力項の定式化、(4) 圧縮性誤差 (5) 二相界面の偽の流速分布、(6) メモリ消費量

の増大、(7) 埋め込み境界法の適用性等である。

一次精度のパウンスバック・スキームで生じた、境界精度が緩和時間に依存する問題は Zou[17]や稲室[18]によって解決され、境界条件に対し二次精度を有するスキームが用いられている。しかし、Fig. 2 (a)の灰色の矢印で示されるように、二次元では角の境界に、三次元では Fig. 2 (b)で示される D3Q15 モデルに対しエッジと角の境界に、上記の手法では設定できない分布関数が存在する。角の分布関数に対し、主に、境界値 u に従う平衡分布関数が与えられるが、計算精度が低下するため、非平衡分布関数を考慮するスキーム[19]が提案されている。また、温度方程式を一成分で扱う場合、例えば、Qian[20]が提案したモデルでは、Fig. 2 (c)に示される 2 倍の大きさの離散速度を有する D2Q13 モデル等が用いられる。Qian のモデルでは、内部エネルギー e は、分布関数 $f_{\sigma,i}$ の運動エネルギーの総和として、

$$\rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) = \sum_{\sigma,i} f_{\sigma,i} \frac{c_{\sigma}^2}{2}, \quad (7)$$

のように定義される。渡利は、粘性散逸等を含む温度方程式を正確に導出するためには、Fig. 2 (d)に示す 7 階テンソルまで等方な正八角形の離散速度を用いるか、正方格子を使うなら離散速度を 29 個以上用いる必要があることを指摘した[21]。この一成分熱モデルでは、二格子間隔以上の大き

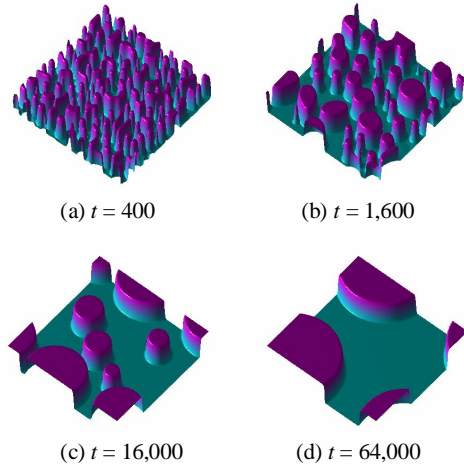


Fig. 3 Phase separation in a LB simulation.

さの速度に対応した分布関数が壁に衝突することになる。つまり、一時間ステップの間に、分布関数と壁との間で複数回の衝突が起きる。この複数回の衝突毎に、壁の密度、流速、温度に対応した平衡分布関数を用い、境界条件を設定する手法が提案されているが、境界近傍で誤差が発生することが指摘されており、今後の解決が待たれる。このように、LBM の境界条件の設定手法についてはまだ議論の余地がある。

外力項の定式化の問題とは、NS 方程式、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (8)$$

の外力 \mathbf{F} を適切に導出できるように、式(1)に付加される外力項 F_i を定式化することである。

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta_t, t + \delta_t) - f_i(\mathbf{x}, t) \\ = -\frac{f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau_v} + \delta_t F_i(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (9)$$

この問題は Guo[22]により解決され、

$$F_i = w_i \rho \left(1 - \frac{1}{2\tau_v} \right) \left[\frac{3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}}{c^2} + \frac{3\mathbf{u} \mathbf{F} : (3\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i - c^2 \mathbf{I})}{c^4} \right], \quad (10)$$

が最も精度が高いことが理論および数値計算によって実証された。ただし、式(10)の外力項を使うためには、速度を、

$$\rho \mathbf{u} = \sum_i f_i \mathbf{c}_i + \frac{\delta_t}{2} \mathbf{F}, \quad (11)$$

のように定義し直す必要がある。もし、外力項が速度に対し非線形な関数である場合、式(11)の取り扱いが面倒になる。例えば、異方性多孔質体の影響を考慮し、外力にプリンクマン項、ダルシー項、フォルクハイマー項を取り入れた場合、

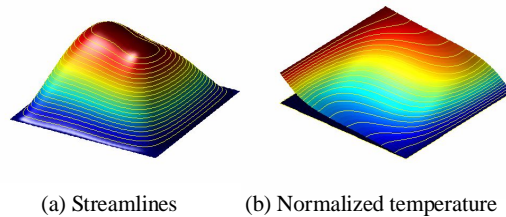


Fig. 4 Natural convection in anisotropic porous media.

Table 1 The average Nusselt number predictions with the generalized equation.

Ra	k*	θ	Nu			
			Brinkman		Forchheimer	
			FEM	LBM	FEM	LBM
10^4	0.1	0°	1.892	1.905	1.587	1.592
		45°	1.870	1.885	1.573	1.580
		90°	1.891	1.905	1.579	1.587
	10	0°	1.140	1.137	1.106	1.107
		45°	1.153	1.171	1.119	1.127
		90°	1.141	1.137	1.106	1.107
10^5	0.1	0°	4.393	4.338	3.475	3.465
		45°	4.425	4.366	3.456	3.469
		90°	4.491	4.425	3.499	3.491
	10	0°	3.203	3.213	2.761	2.757
		45°	3.191	3.192	2.853	2.771
		90°	2.951	2.954	2.636	2.634

$$F_\alpha = -\frac{\varepsilon V}{K_{\alpha\beta}} u_\beta - \frac{\varepsilon F_\alpha}{\sqrt{K_{\alpha\beta}}} |u| u_\beta + \varepsilon G_\alpha, \quad (12)$$

のように速度に対する二乗の項が存在する。ここで、 ε は気孔率、 $K_{\alpha\beta}$ は透過係数、 G_α は重力加速度を表す。外力 F に速度 u が非線形な形で含まれるため、式(11)から流速 u を陽に求めることはできない。このため、最適化手法等を用いる必要がある。式(12)の外力に対し、式(11)に最適化手法を適用した LBM による多孔質体内自然対流解析の結果を Fig. 4 に示す。ここで、温度方程式、

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \chi \nabla^2 T, \quad (13)$$

は、 g_i に関する運動方程式、

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta_i, t + \delta_i) - g_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau_c}, \quad (14)$$

により計算される[23]。温度 T は g_i により、

$$\rho T = \sum_i g_i, \quad (15)$$

で定義され、熱拡散率は式(14)の τ_c から、

$$\chi = \frac{2}{3} \left(\tau_c - \frac{1}{2} \right) c^2 \delta_i, \quad (16)$$

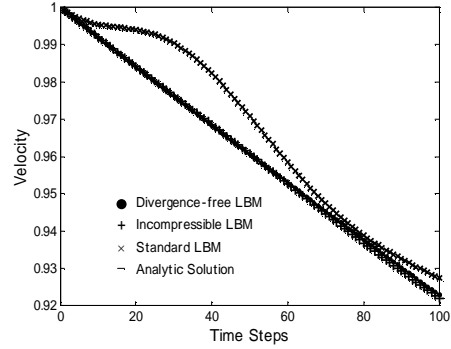
のように求められる。ダルシー数を $Da = 10^{-2}$ と

一定にし、傾き θ 、透過係数の比 k^* 、レイリー数 Ra を変えた場合の異方性多孔質体内自然対流解析における平均ヌセルト数 Nu を Table 1 に示す。Nithiarasu らによる FEM の結果[24]とほぼ等しい値が、LBM により得られている[25]。外力項の定式化の問題は IB-LBM の精度にも関係し、計算精度や、アルゴリズムの簡潔さ、計算速度等に対するトレードオフを考慮する必要がある。

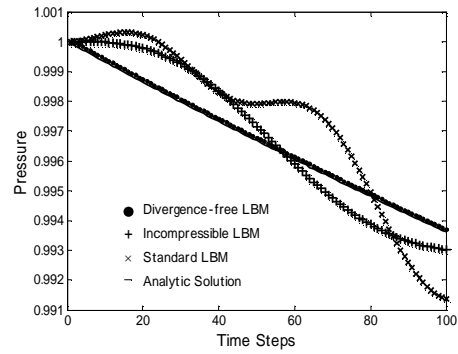
マルチスケール展開により式(1)から導出される質量保存式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0, \quad (17)$$

で与えられる。このため、LBM ではマッハ数が非圧縮性流体解析に対する限界を超えないように代表速さを適切に設定する必要がある。これを



(a) Velocity



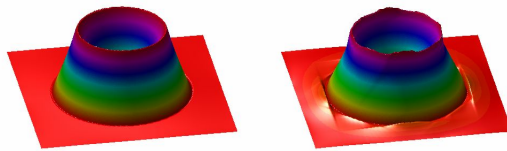
(b) Pressure

Fig. 5 Temporal evolution of velocity and pressure in Taylor vortex flow. Mach = 0.3.

圧縮性誤差の問題と呼ぶ。キャピティー流れや自然対流解析の計算において、圧縮性誤差による圧力の振動が報告されており、平衡分布関数を修正した非圧縮性流体解析に対する LBM[26, 27]や、流れ関数-渦度法に基づく LBM[28]が提案されている。稲室は二相流解析において、圧力に対するポアソン方程式を記述する新たな分布関数を導入することにより、連続の式を満足させ、密度比の高い二相流の計算に成功している[29]。稲室の手法を単相流解析に適用し、テーラー渦流れを計算し、圧縮性誤差を検証する。マッハ数が 0.3 における流速と圧力の時間変化を Fig. 5 に示す[30]。フラクショナルステップ法を LBM に適用した結果を \times で、非圧縮性 LBM[26]の結果を $+$ で、従来型の LBM による結果を \times で、厳密解を実線で示す。なお、流速および圧力は、最大値を取る点の値を用い、初期値で正規化した。Fig. 5 において、従来型の D2Q9 モデルでは流速と圧力に対して振動が発生している。一方、連続の式を満足するように流速を修正しなければ、非圧縮性 LBM でも圧力振動が生じる。以上より、従来型の LBM には圧力に僅かな振動があることを理解した上で、LBM を利用する必要がある。二相界面に発生する偽の流速分布の問題や、LBM に対する乱流モデル、混相流モデル、非構造格子への適用に関する解説は文献[4]等に譲る。次節で、メモリ消費量と埋め込み境界法の適用について言及する。

3. 埋め込み境界法の適用

LBM では、等間隔のデカルト座標上に配置された粒子速度分布関数の運動により NS 方程式が解析される。デカルト座標上に任意形状の境界を簡単に設定できる埋め込み境界法 (IBM) が LBM に適用された IB-LBM の研究が、近年盛んに行わ



(a) $\tau_v = 1$ (b) $\tau_v = 5$
Fig. 6 Profiles of the velocity of cylindrical Couette flows.

れ、固気二相流解析に対する有効性が示されている[31-34]。しかし、IB-LBM にも問題点が指摘されている。外円は静止し、内円が一定の速度 $u_0 = 0.01$ で回転する同心円筒間のクエット流れを IB-LBM により計算する。内円の半径は $R_i = 45$ 、外円の半径は $R_o = 70$ 、計算領域は 200×200 とする。厳密解は、

$$u(R) = u_0 \frac{R/R_o - R_o/R}{R_i/R_o - R_o/R_i}, \quad (18)$$

で与えられる。緩和時間 $\tau_v = 1$ 、 $\tau_v = 5$ に対する流速分布を Fig. 6 (a)、(b) に示す。緩和時間が増加するにつれ、境界近傍で流速分布に歪みが発生することが Fig. 6 より分かる。この歪みは IB-LBM が有する本質的な問題であり、 Le は剪断流を対象に、IB-LBM による境界近傍の速度の誤差を理論的に導出し、計算条件として $\tau_v < 2$ を提案した[33]。なお、 $\tau_v = 5$ の条件は IB-LBM の特性を明確化するために用いており、通常、LBM で $\tau_v > 1$ が用いられることはほとんどない。また、IB-LBM において、式(9)の外力項に対し、式(10)、(11)を用いることにより、固気界面における流れの漏れの問題を解決出来ることが示されている[34]。

LBM には f と f^{eq} の二種類の分布関数に対し、二次元で 9 方向、三次元で 15 方向以上の変数が必要になるため、流速 u と圧力 p のみを用いる従来の数値計算手法に比べメモリ消費量が多い。この問題に対し、メモリ消費量を半減できる Lattice Kinetic Scheme (LKS) が稲室により提案された[35]。従来の IBM の運動方程式に対し緩和時間を $\tau_v = 1$ とすることで LKS の運動方程式、

$$f_i(\mathbf{x}, t + \delta_t) = f_i(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i \delta_t, t), \quad (19)$$

が導出される。式(19)は時間刻み δ_t の間に分布関数 f_i が一格子移動することを意味する。各離散速度方向に移動した後、分布関数は次々に置き換えられる。

$$f_i = \omega_i p \left[1 + 3c_{i\alpha} u_\alpha + \frac{9}{2} c_{i\alpha} c_{i\beta} u_\alpha u_\beta - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + A \delta_t \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) c_{i\alpha} c_{i\beta} \right]. \quad (20)$$

LKS では f^{eq} は必要ないため、LBM と比較し変数の個数が半減される。なお、 $\tau_v = 1$ とした場合、式(6)において動粘性係数が固定されるが、

LKSの動粘性係数は、式(20)のAによって調整される。

$$\nu = \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{9} A \right) \delta_l. \quad (21)$$

従来のLBMの運動方程式に対し緩和時間を $\tau_v = 1$ とすることで式(19)が導出されるため、IB-LBMの計算条件 $\tau_v < 2$ をLKSは十分満足する。LBMと比較し計算メモリを有効に活用できる以外に、境界上の分布関数も式(20)によって与えられるため、境界上に流速の勾配情報も直接与えることが出来る等の利点がある。以下、埋め込み境界法をLKSに適用したIB-LKSの計算例を示す。

剪断流中に存在する移動粒子の挙動をIB-LBMとIB-LKSによって解析する。幅 $W = 2,000$ 、高さ $H = 80$ のチャネル内に、直径20、初速度0の粒子を高さ20の位置に置く。上下壁は互いに逆方向に $u_w/2 = 1/120$ の速さで移動する。レイノルズ数 $Re = 40$ であり、重力は働かない。移動する粒子の高さの時間変化をFig. 7に示す。高い弾性係数を用いることで構造体から流体に作用する外力を計算するPenalty Methodに基づくIB-LBM[32]の結果を、FEM[36]の結果を、Direct Forcing Methodに基づくIB-LKSとIB-LBMの結果を実線と破線で、それぞれ示す。Fig. 7からIB-LKSによる本計算結果が他の計算結果とよい一致を示しており、剪断流中の粒子挙動がIB-LKSにより適切に計算されたことが分かる。

最後に、重力加速度 $g = 981[\text{cm}/\text{s}^2]$ を考慮し、チャネル内の二つの粒子の沈降の計算を行う。チャネル幅は2[cm]、高さは8[cm]、動粘性係数は0.01

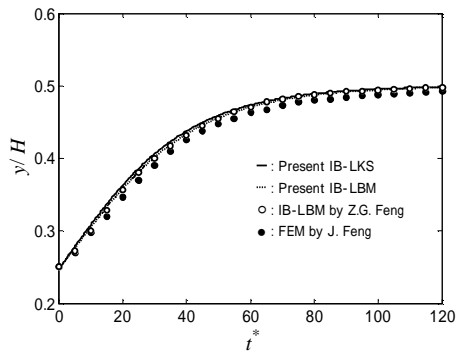
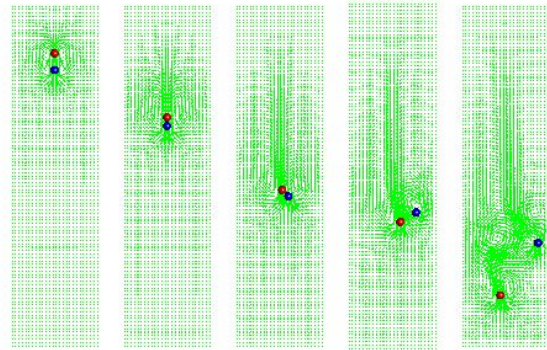


Fig. 7 The lateral migration of the particle.



(a) $t = 0.5$ (b) $t = 1.5$ (c) $t = 2.5$ (d) $t = 3.0$ (e) $t = 4.5$

Fig.8 Sedimentation of two particles in a channel.

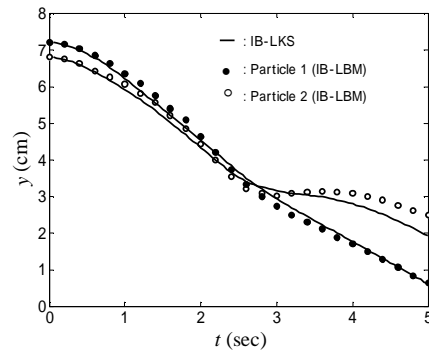


Fig.9 Transverse coordinates of the centers of the two particles.

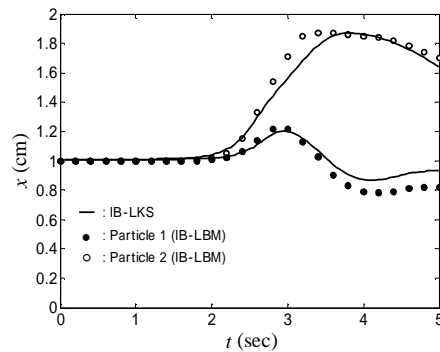


Fig. 10 Longitudinal coordinates of the centers of the two particles.

[cm²/s]、流体の密度は 1.00[g/cm³]、粒子の密度は 1.01 [g/cm³]、半径は 0.1[cm]とし、粒子 1 (Particle 1) は (0.999[cm], 7.2[cm]) に、粒子 2 (Particle 2) は (1[cm], 6.8[cm]) に配置する。時間刻みが 5.0 × 10⁻⁴[s]になるように、係数 *A* を調整する。粒子同士および粒子と壁との衝突には Glowinski のモデル[37]を用いる。0.5、1.5、2.5、3.0、4.5[s]における流速分布と粒子位置とを Fig. 8 に、垂直方向と水平方向の粒子位置の時間変化を、それぞれ、Figs. 9, 10 に示す。Figs. 9, 10 から、IB-LKS による本計算結果が、参照解[31]と良い一致を示すことが分かる。また、粒子 1 が粒子 2 に追いついた後、二つの粒子がチャンネル中心からゆっくり逸れ、回転しながらお互いに離れていく DKT (Drafting, Kissing, Tumbling) 現象 [31]を再現できていることが Fig. 8 から分かる。

4. 結 言

LBM は実用的な計算に対応でき、商用ソフトとして十分な実績を挙げる一方で、今回紹介したような問題点がまだ残されている。単一緩和時間モデル[2]よりも数値的安定性に優れた多緩和時間 (Multiple Relaxation Time, MRT) モデル[39]が様々な計算に用いられつつあることから分かるように、アルゴリズムの簡便さと計算精度とのトレードオフを考えながら、LBM の改良が続けられており、今後の更なる発展が期待できる分野である。LBM の最新の研究動向が分かる国際会議として、International Conference on the Discrete Simulation of Fluid Dynamics (DSFC) が挙げられる。DSFC はヨーロッパ、アメリカ、アジアの順で毎年開催されており、今年は 7 月にローマで開催された。日本混相流学会年会講演会、数値流体シンポジウム、LBM 研究会が、LBM に関する情報交換を行う国内での有益な場となっている。

謝 辞

貴重な情報をご提供いただいた有賀由香里氏をはじめエクサ・ジャパン株式会社の皆様に感謝の意を申し上げます。研究の実施に当たり、多大なご指導を頂いた高橋亮一 東京工業大学名誉教授、竹越栄俊 富山大学名誉教授、奥井健一 富山大学名誉教授、阿部豊 筑波大学教授、富山明男 神戸大学教授、内山知実 名古屋大学教授に深謝します。

参考文献

- [1] McNamara, G.R. and Zanetti, G., Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata, *Physical Review Letters*, Vol.61(20), 2332-2335 (1988).
- [2] Qian, Y.H., D'Humières D. and Lallemand, P., Lattice BGK models for Navier-Stokes Equation, *Europhysics Letter*, Vol.17(6), 479-484 (1992).
- [3] Qian, Y.H, Succi, S. and Orszag, S.A., Recent Advances in Lattice Boltzmann Computing, *Annual Reviews of Computational Physics*, Vol.3, 195-242 (1995).
- [4] Chen, S. and Doolen, G.D., Lattice Boltzmann method for fluid flows, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.30, 329-364 (1998).
- [5] Prosperetti, A. and Tryggvason, G ed., *Computational Methods for Multiphase Flow*, 157-192, Cambridge University Press, UK (2007).
- [6] Succi, S., *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*, Oxford University Press, USA (2001).
- [7] Chen, Y. and Ohashi, H., Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Applications, *Journal of the Japan Society for Simulation Technology*, Vol. 17(3), 213-219 (1998).
- [8] Watanabe, T., Lattice Boltzmann Method, *Bulletin of the Japan Society for Industrial and applied Mathematics*, Vol.16, 31-35, 170-175, 248-257, 331-338 (2006).
- [9] Takada, N., Hayashi, H., Seta, T., Yamamoto, K., Yoshino, M. and Matsukuma, Y., Numerical Analysis of Complex Fluid Flows by the Lattice Boltzmann Method, *Journal of the Japan Society for Computational Engineering and Science* Vol.14(3), 2102-2123 (2009).
- [10] Tsutahara, M., Takada, N. and Kataoka, T., *Lattice Gas and Lattice Boltzmann Methods*, Corona Publishing, Tokyo (1999).
- [11] Tsutahara, M., Watari, M., Tanahashi, T. and Yabe, T., *Frontiers of CFD*, 1-80, Kyoritsu Publishing, Tokyo (2007).
- [12] Kobayashi, T. ed. *Handbook of Computational Fluid Dynamics (in Japanese)*, 207-216, Maruzen Publishing, Tokyo (2002).
- [13] Aoki, T. and Nukada, A., *Introduction to CUDA Programming*, Kogakusha Publishing, Tokyo (2009).
- [14] Peskin, C.S., Flow Patterns around Heart Valves: A Numerical Method, *Journal of Computational Physics*, Vol.10, 252-271 (1972).
- [15] Zheng, H.W., Shu, C. and Chew, Y.T., A Lattice Boltzmann Model for Multiphase Flows with Large Density Ratio, *Journal of Computational Physics*, Vol.218, 353-371 (2006).
- [16] Seta, T., Kono, K., Martínez, D. and Chen, S., Lattice Boltzmann Scheme for Simulating Two-Phase Flows, *JSME International Journal B*,

- Vol.43(2), 305-313 (2000).
- [17] Zou, Q. and He, X., On Pressure and Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model, *Physics of Fluids*, Vol.9, 1591-1598 (1997).
- [18] Inamuro, T., Yoshino, M. and Ogino, F., A Non-Slip Boundary Condition for Lattice Boltzmann Simulations, *Physics of Fluids*, Vol.7(12), 2928-2930 (1995).
- [19] Hollis, A.P., Halliday, I. and Care, C.M., An Accurate and Versatile Lattice Closure Scheme for Lattice Boltzmann Equation Fluids under External Forces, *Journal of Computational Physics*, Vol.227, 8065-8082 (2008).
- [20] Qian, Y.H., Simulating Thermohydrodynamics with Lattice BGK Models, *Journal of Scientific Computing*, Vol.8(3), 231-242 (1993).
- [21] Watari, M. and Tsutahara, M., Possibility of Constructing a Multispeed Bhatnagar-Gross-Krook Thermal Model of the Lattice Boltzmann Method, *Physical Review E*, Vol.70, 016703 (2004).
- [22] Guo, Z., Zheng, C. and Shi, B., Discrete Lattice Effects on the Forcing Term in the Lattice Boltzmann Method, *Physical Review E*, Vol.65, 046308 (2002).
- [23] Peng, Y., Shu, C. and Chew, Y.T., Simplified Thermal Lattice Boltzmann Model for Incompressible Thermal Flows, *Physical Review E*, Vol.68, 026701 (2003).
- [24] Nithiarasu, P., Sujatha, K.S., Ravindran, K., Sundararajan, T. and Seetharamu, K.N., Non-Darcy Natural Convection in a Hydrodynamically and Thermally Anisotropic Porous Medium, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.188, 413-430 (2000).
- [25] Seta, T., Takegoshi, E. and Okui, K., Lattice Boltzmann Simulation of Natural Convection in Porous Media, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol.72, 195-200 (2006).
- [26] Zou, Q., Hou, S., Chen, S. and Doolen, G.D., A Improved Incompressible Lattice Boltzmann Model for Time-Independent Flows, *Journal of Statistical Physics*, Vol.81, 35-48 (1995).
- [27] Guo, Z., Shi, B. and Wang, N., Lattice BGK Model for Incompressible Navier-Stokes Equation, *Journal of Computational Physics*, Vol.165, 288-306 (2000).
- [28] Chen, S., Tölke, J. and Krafczyk, M., A New Method for the Numerical Solution of Vorticity-Streamfunction Formulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.198, 367-376 (2008).
- [29] Inamuro, T., Ogata, T., Tajima, S. and Konishi, N., A lattice Boltzmann Method for Incompressible Two-Phase Flows with Large Density Differences, *Journal of Computational Physics*, Vol.198, 628-644 (2004).
- [30] Saiki, Y. and Seta, T., Numerical Analysis of Incompressible Flows by the Lattice Boltzmann Method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers B*, Vol.74, 2124-2131 (2008).
- [31] Niu, X.D., Shu, C., Chew, Y.T. and Peng, Y., A Momentum Exchange-Based Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method for Simulating Incompressible Viscous Flows, *Physics Letter A*, Vol.354, 173-182 (2006).
- [32] Feng, Z-G and Michaelides, E.E., The Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method for Solving Fluid-Particles Interaction Problems, *Journal of Computational Physics*, Vol.195, 602-628 (2004).
- [33] Le, G. and Zhang, J., Boundary Slip from the Immersed Boundary Lattice Boltzmann Models, *Physical Review E*, Vol.79, 026701 (2009).
- [34] Wu, J. and Shu, C., Implicit Velocity Correction-Based Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method and Its Applications, *Journal of Computational Physics*, Vol.228, 1963-1979 (2009).
- [35] Inamuro, T., A Lattice Kinetic Scheme for Incompressible Viscous Flows with Heat Transfer, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, Vol.360, 477-484 (2002).
- [36] Feng, J., Hu, H.H. and Joseph, D.D., Direct Simulation of Initial Value Problems for the Motion of Solid Bodies in a Newtonian Fluid. Part2. Couette and Poiseuille Flows, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.277, 271-301 (1994).
- [37] Glowinski, R., Pan, T.-W., Hesla, T.I. and Joseph, D.D., A Distributed Lagrange Multiplier/Fictitious Domain Method for Particulate Flows, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol.25, 755-794 (1999).
- [38] Lallemand, P. and Luo, L.-S., Theory of the Lattice Boltzmann Method: Dispersion, Dissipation, Isotropy, Galilean Invariance, and Stability, *Physical Review E*, Vol.61, 6546-6562 (2000).
-