枯渇性資源と技術進歩

増　田　信　彦

1. はじめに

資源の希少性が経済成長に及ぼす影響を克服あるいは軽減するものとして，次のようなものが考えられる。すなわち，技術進歩，稀少資源から豊富な資源あるいは人間が造れる資本への代替，規模に関する収獲逓増，資本多消費型の生産物から資本節約型の生産物への需要変化など。その中でも特に技術進歩の果たす役割は非常に大きいものである。新資源の発見，低品位資源の利用，代替資源の開発，廃棄物の回収と再利用，資源効率の高い生産方式の開発などにおいて常に技術進歩が必要とされる。なお，ここでは技術進歩という言葉を，新技術の発見や開発ばかりでなく現存する技術の新たな適用や実施も含む広い意味で使っている。

これまでに，Beckmann〔2〕, Stiglitz〔4〕は複数の生産要素をもつ Cobb-Douglas 生産関数を用いて，技術進歩が枯渇性資源の消費レベルや経済成長にどのような影響を与えるかを理論的に検討している。

この小論においては技術進歩を，資源の総量を増加させるものと資源の使用効率を高めるものの二つに大別して，それが資源の使用レベルや枯渇時期にどのような影響を与えるかを理論的に考察するものである。その際一意的な最適解の存在を証明する。ここで使われるモデルは，Koopmans〔3〕のモデルに技術進歩を導入することにより，それを拡張したものである。（そして原則として Koopmans と同じ記号を用いる。）枯渇性資源は Barnett と Morse〔1〕の言う「Malthus 希少性」を持つと仮定する。すなわち，資源の総量は有限であり，その総量まで資源の品位は一定であるとする。そして，社会的効用関数 $v(r)$ は資源のみを変数として持ち，生存のために資源の最小使用量 $\underline{r}$ が必要

であると仮定する。なお，ミクロ経済を考えて，この関数をある資源を保有する企業の利潤関数と見なしてもよい。最適解は，将来の社会的効用を割引率 ρ で割り引いた現在価値を最大にするものとする。効用関数 $v(r)$ は $r \geqq \underline{r}$ で定義され，二階連続微分可能であり，次の条件を満足すると仮定する。

$$v'(r) > 0 \tag{1a}$$

$$v''(r) < 0 \tag{1b}$$

$$v(\underline{r}) = 0 \tag{1c}$$

$$\lim_{r \to \underline{r}} v'(r) = \infty \tag{1d}$$

（1 a）は社会的効用が資源の増加関数であることを意味する。$v(r)$ が利潤関数の場合には，通常この性質は大きな r の値に対しては妥当しない。そのように修正すると証明が複雑になるけれども，同じ結論が得られる。（1 b）は社会的効用の逓減が働いていることを示す。（1 c）は社会的効用の基準値を設定するため，また（1 d）は証明の簡略化のために用いられる。

2. 資源の総量を増加させる技術進歩

これは，新資源の発見，低品位資源の利用，代替資源の開発などを可能にする技術進歩のように，資源の総量を増加させるものを意味する。ここでは，これらの技術進歩は体化されていない，すなわち外生的に与えられるものとする。そして，時期 t における資源の総量は RA_t で表わされ，A_t は $t \geqq 0$ において定義され，二階連続微分可能であり，次の性質を持つと仮定する。

$$A_0 = 1 \tag{2a}$$

$$0 \leqq \dot{A}_t \tag{2b}$$

$$R\dot{A}_t < \underline{r} \tag{2c}$$

$$\ddot{A}_t \leqq 0 \quad \text{注)} \tag{2d}$$

（2 b）は技術変化が退歩しないことを意味する。（2 d）は技術進歩が加速されないことを意味し，最適解の存在には必要ではないけれども，一意性に必要

注）記号（・）と（・・）はそれぞれ変数の時間に関する一次と二次の微係数を示す。

である。(2 c) は，単位時間当りの技術進歩による資源の増加量は最小必要使用量より小さいことを意味する。今，関数 $f(T)=RA_T-\underline{r}T$ を考える。(2 a) より $f(0)=R>0$，そして (2 c) より $f'(T)=R\dot{A}_T-\underline{r}<0$。十分に大きな T に対して $f(T)<0$ ので，$f(T)=0$ となるような T が一意的に存在する。このような T を $\bar{T}$ と定義すると，$T<\bar{T}$ である T に対して

$$RA_T>\underline{r}T \tag{3}$$

はじめに一意的な最適解が存在することを，Koopmans と同じ方法で証明する。

定理 1

r_t が〔$0, T$〕において連続であり，

$$\int_0^T r_t\ dt \leqq RA_T,\ \ r_t \geqq \underline{r},\ \ 0 \leqq t \leqq T \tag{4}$$

という制約のもとで，

$$V[\rho, T, (r_t)]=\int_0^T e^{-\rho t}v(r_t)dt \tag{5}$$

を最大にするような一意的な最適解が任意の割引率 $\rho \geqq 0$ に対して存在する。

証明

最初に，$0<T^*<\bar{T}$ を満足し，任意に固定された $T=T^*$ という制約のもとでの最適解 r_t^* を考える。ある $\delta>0$ に対して，

$$r_t^* \geqq \underline{r}+\delta,\ \ 0 \leqq t \leqq T^*$$

となるような最適解が存在すると仮定する。すると，もし s_t が

$$|s_t| \leqq \delta,\ \ \int_0^{T^*} s_t\ dt=0,\ \ 0 \leqq t \leqq T^* \tag{6}$$

となる連続関数であるならば，経路

$$r_t=r_t^*+\varepsilon\, s_t,\ \ |\varepsilon| \leqq 1,\ \ 0 \leqq t \leqq T^* \tag{7}$$

は実行可能解であり，次の関係を満足する。

$$\begin{aligned} &V[\rho, T^*, (r_t)]-V[\rho, T^*, (r_t^*)] \\ &=\int_0^{T^*} e^{-\rho t}[v(r_t)-v(r_t^*)]dt \\ &=\varepsilon\int_0^{T^*} e^{-\rho t}v'(r_t^*)s_t\ dt+R(\varepsilon) \end{aligned} \tag{8}$$

ここで $R(\varepsilon)$ は ε に関する二次の剰余である。従って，(6)を満足する任意の s_t に対して，(8)が正でないための必要条件は，

$$e^{-\rho t}v'(r_t^*)=C,\quad 0\leqq t\leqq T^* \tag{9}$$

ここでCは定数である。これと（1 a），（1 b）より $r_{T*}^*>\underline{r}$ に対して

$$r_t^*=v'^{-1}[e^{\rho(t-T^*)}v'(r_{T^*}^*)],\quad 0\leqq t\leqq T^* \tag{10}$$

が得られ，r_t^* は連続関数となり，制約条件を満足する。（1 b）と(10)によって，$\rho=0$ に対して r_t^* は一定となり，$\rho>0$ に対して r_t^* は減少する。もし $r_{T^*}^*$ が与えられれば，(10)により解 r_t^* は一意的に決定され，それぞれの t において，r_t^* は微分可能で，与えられた $r_{T^*}^*$ の増加関数である。そして（1 d），(9)，(3)から

$$\lim_{r_{T^*}^*\to\underline{r}}\int_0^{T^*} r_t^*\,dt=\int_0^{T^*}\underline{r}\,dt=T^*\underline{r}<RA_{T*} \tag{11}$$

また，(10)より十分に大きな $r_{T^*}^*$ に対して

$$\int_0^{T^*} r_t^*\,dt>RA_{T*}$$

それ故，

$$\int_0^{T^*} r_t^*\,dt=RA_{T*} \tag{12}$$

となる一意的な $r_{T^*}^*$ が存在し，(10)，(11)より $r_t^*>\underline{r}$，$0\leqq t\leqq T^*$ である。

次に，r_t^* が一意的な最適解であることを証明するために，ある $t_0\in[0,\ T^*]$ に対して $r_{t_0}\neq r_{t_0}^*$ である任意の実行可能解を r_t としよう。すると r_t と r_t^* の連続性により，t_0 のある近傍 $\tau\subset[0,\ T^*]$ のすべての t に対して，$r_t\neq r_t^*$ となる。（1 b）より

$t\in\tau$ に対して　$v(r_t)-v(r_t^*)<(r_t-r_t^*)v'(r_t^*)$

$t\in[0,\ T^*]-\tau$ に対して　$v(r_t)-v(r_t^*)\leqq(r_t-r_t^*)v'(r_t^*)$

従って，(9)，(4)，(12)より

$$V[\rho,T^*,(r_t)]-V[\rho,T^*,(r_t^*)]$$
$$=\int_0^{T^*} e^{-\rho t}[v(r_t)-v(r_t^*)]dt$$

$$<\int_0^{T^*}(r_t-r_t^*)e^{-\rho t}v'(r_t^*)dt$$

$$=e^{-\rho T^*}v'(r_{T^*}^*)\int_0^{T^*}(r_t-r_t^*)dt\leqq 0$$

それ故，r_t^* は与えられた T^* に対して一意的な最適解である。

これまで T^* を固定したものと考えてきたが，ここより変数と見なす。そして T^* の代りにT，r_t^* の代りに r_t^T と書くことにする。r_t^T は $0\leqq t\leqq T<\bar{T}$ においてTに関して微分可能であるので，

$$V_T=V[\rho,T,(r_t^T)]=\int_0^T e^{-\rho t}v(r_t^T)dt$$

もまたTに関して微分可能である。そこで，(9)より

$$\frac{dV_T}{dT}=e^{-\rho T}v(r_T^T)+\int_0^T e^{-\rho t}\,v'(r_t^T)\frac{dr_t^T}{dT}dt$$

$$=e^{-\rho T}v(r_T^T)+e^{-\rho T}v'(r_T^T)\int_0^T\frac{dr_t^T}{dT}\,dt$$

(12)より

$$R\dot{A}_T=r_T^T+\int_0^T\frac{dr_t^T}{dT}\,dt$$

従って，

$$\frac{dV_T}{dT}=e^{-\rho T}[v(r_T^T)-v'(r_T^T)(r_T^T-R\dot{A}_T)]$$

ここで

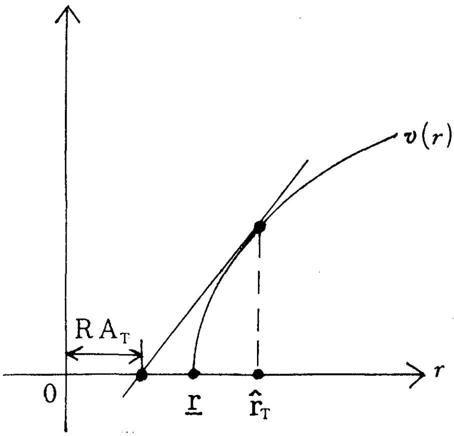
$$v'(r_T)=\frac{v(r_T)}{r_T-R\dot{A}_T} \qquad (13)$$

となる r_T を $\hat{r}_T$ と定義しよう。そのような $\hat{r}_T$ は（1 a），（1 b），（1 c），（2 c）より図に示されるように，常に存在する。（1 b），（2 c）から $r\geqq\underline{r}$ に対して

$$\frac{d[v(r)-v'(r)(r-R\dot{A}_T)]}{dr}$$

$$=-v''(r)(r-R\dot{A}_T)>0$$

であるので，(13)より



$$r_T^T \begin{bmatrix} < \\ = \\ > \end{bmatrix} \hat{r}_T \text{ 対して } \frac{dV_T}{dT} \begin{bmatrix} < \\ = \\ > \end{bmatrix} 0 \tag{14}$$

(13)をTに関して微分し，移項すると，（2c），（2d）より

$$\frac{d\hat{r}_T}{dT} = \frac{R\ddot{A}_T v'(\hat{r}_T)}{v''(\hat{r}_T)(\hat{r}_T - R\dot{A}_T)} \geqq 0 \tag{15}$$

次に，(10)を(12)に代入し，Tに関して微分し，移項すれば，

$$\frac{dr_T^T}{dT} = \frac{-(r_T^T - R\dot{A}_T)}{v''(r_T^T)\int_0^T \frac{1}{v''(r_t^T)} e^{\rho(t-T)} dt} + \frac{\rho v'(r_T^T)}{v''(r_T^T)} < 0 \tag{16}$$

が（1a），（1b），（2c）から得られる。従って，(15)，(16)によって

$$\frac{d(r_T^T - \hat{r}_T)}{dT} < 0, \quad 0 \leqq T \leqq \bar{T}$$

ここで，$r_T^T = \hat{r}_T$ となるようなTを T_ρ と定義すると，

$$\text{もし } T \begin{bmatrix} > \\ = \\ < \end{bmatrix} T_\rho \text{ ならば，} \quad r_T^T \begin{bmatrix} < \\ = \\ > \end{bmatrix} \hat{r}_T \tag{17}$$

それ故，(14)，(17)から

$$T \begin{bmatrix} > \\ = \\ < \end{bmatrix} T_\rho \text{ に対して } \frac{dV_T}{dT} \begin{bmatrix} < \\ = \\ > \end{bmatrix} 0$$

すなわち，V_T は $T = T_\rho$ において一意的に最大値を持つ。証明終

このようにして存在することが証明された最適解は(10)，(12)，(13)を満足する。これよりこの最適解の性質を考察する。

定理 2

(i) $\dfrac{dT}{d\rho} < 0$

(ii) $\rho = 0$ の時，$\dfrac{dr_t}{dt} = 0$

$\rho > 0$ の時，$\dfrac{dr_t}{dt} < 0$

ここより技術進歩は一定であると仮定する，すなわち $\dot{A}_t = \alpha$，$\alpha R < \underline{r}$。すると

$$A_t = 1 + \alpha t, \quad t \geqq 0 \tag{18}$$

(iii) $\dfrac{dr_T}{d\alpha} < 0$

(iV) $\dfrac{dT}{d\alpha}>0$

(i)は，割引率が上昇する時，枯渇時期が短縮されることを意味する。(ii)は，割引率がゼロの時資源の使用量が一定であり，割引率が正の時資源の使用量が減少することを示す。(i)及び(ii)の結果は Vousden〔5〕, Koopmans〔3〕などによって既に得られている結果と一致する。(iii)は技術進歩が増加する時，枯渇時期における資源の使用量が減少することを意味する。(iV)は技術進歩が増加する時，枯渇時期が延期されることを示す。

証明

(i) (10)を(12)に代入し，それを ρ に関して微分し，移項すると

$$\frac{dT}{d\rho}=\frac{v'(r_T)\displaystyle\int_0^T\frac{T-t}{v''(r_t)}e^{\rho(t-T)}dt}{r_T-R\dot{A}_T+v''(r_T)\dfrac{dr_T}{dT}\displaystyle\int_0^T\frac{1}{v''(r_t)}e^{\rho(t-T)}dt-\rho v'(r_T)\displaystyle\int_0^T\frac{1}{v''(r_t)}e^{\rho(t-T)}dt}$$

が得られ，(1a)，(1b)，(2c)，(15)より $\dfrac{dT}{d\rho}<0$。

(ii) (10)より明白である。

(iii) (13)，(18)より，α に関して微分すると，

$$\frac{dr_T}{d\alpha}=\frac{Rv'(r_T)}{v''(r_T)(r_T-R\alpha)}<0 \tag{19}$$

が(1a)，(1b)，(2c)から得られる。

(iV) (10)を(12)に代入し，それと(18)を α に関して微分し，移項すると

$$\frac{dT}{d\alpha}=\frac{RT-v''(r_T)\dfrac{dr_T}{d\alpha}\displaystyle\int_0^T\frac{1}{v''(r_t)}e^{\rho(t-T)}dt}{r_T-R\alpha-\rho v'(r_T)\displaystyle\int_0^T\frac{1}{v''(r_t)}e^{\rho(t-T)}dt}$$

が得られ，(1a)，(1b)，(19)より $\dfrac{dT}{d\alpha}>0$。

3. 資源使用効率を高める技術進歩

これは，資源効率の高い生産方式の開発や廃棄物の回収と再利用などのよう

に，資源の使用効率を高める技術進歩を意味する。ここでは，これらの技術進歩は体化されていないものとする。そして時期 t において資源を自然単位で r_t だけ使用すれば，技術進歩のお陰で効率単位で $\tilde{r}_t=B_t r_t$ の資源の効果があるものとする。ここで B_t は $t \geqq 0$ において定義され，二階連続微分可能であり，次の性質を持つと仮定する。

$$B_0=1 \tag{20 a}$$

$$0 \leqq \dot{B}_t \tag{20 b}$$

$$\frac{\dot{B}_t}{B_t} \leqq \rho \tag{20 c}$$

$$R\frac{\dot{B}_t}{B_t} < \underline{r} \tag{20 d}$$

（20 b）は技術変化は退歩しないこと，（20 c）は技術進歩率は割引率より大きくならないことを意味する。また（20 d）は資源総量に技術進歩率を掛けたものは効率単位で表わされた資源の最小必要量より小さいことを示す。そして（20 a），（20 d）より

$$B_t < e^{\frac{\underline{r}}{R}t}, \quad 0<t \tag{21}$$

が得られる。$f(T)=\frac{R}{\underline{r}}-\int_0^T \frac{1}{B_t}dt$ という関数を考えると，$f(0)=\frac{R}{\underline{r}}>0$，$f'(T)=-\frac{1}{B_T}<0$ となり，(21)から $f(\infty)=\frac{R}{\underline{r}}-\int_0^\infty \frac{1}{B_t}dt<\frac{R}{\underline{r}}-\int_0^\infty e^{-\frac{\underline{r}}{R}t}dt=0$。

従って $f(T)=0$，すなわち

$$R=\underline{r}\int_0^T \frac{1}{B_t}dt \tag{22}$$

となるような $T=\bar{T}$ が一意的に存在する。まず，ここでも Koopmans と同じ方法を使って，一意的な最適解の存在を証明する。

定理 3

r_t が〔0，T〕において連続であり，

$$\int_0^T r_t dt \leqq R, \quad r_t \geqq \frac{\underline{r}}{B_t}, \quad 0 \leqq t \leqq T \tag{23}$$

という制約のもとで，

$$V[\rho, T, (r_t)] = \int_0^T e^{-\rho t} v(B_t r_t) dt \tag{24}$$

を最大にするような一意的な最適解が，(20 c）を満足する任意の割引率 $\rho \geqq 0$ に対して，存在する。

証明

最初に，$0 < T^* < \bar{T}$ を満足し，任意に固定された $T = T^*$ という制約のもとでの最適解 r_t^* を考える。ある $\delta > 0$ に対して $0 \leqq t \leqq T^*$ において $r_t^* \geqq \frac{r}{B_t} + \delta$ となるような最適解が存在すると仮定しよう。するともし s_t が $0 \leqq t \leqq T^*$ において定義され，

$$|s_t| \leqq \delta, \quad \int_0^{T^*} s_t \, dt = 0, \quad 0 \leqq t \leqq T^* \tag{25}$$

となる連続関数であるならば，$|\varepsilon| \leqq 1$ であるような $r_t = r_t^* + \varepsilon s_t$ は $0 \leqq t \leqq T^*$ において実行可能であり，次の式を満足する。

$$\begin{aligned} &V[\rho, T^*, (r_t)] - V[\rho, T^*, (r_t^*)] \\ &= \int_0^{T^*} e^{-\rho t} [v(B_t r_t) - v(B_t r_t^*)] dt \\ &= \varepsilon \int_0^{T^*} e^{-\rho t} v'(B_t r_t^*) B_t s_t dt + R(\varepsilon) \end{aligned} \tag{26}$$

ここで $R(\varepsilon)$ は ε に関する二次の剰余である。(25)を満足する任意の s_t に対して(26)が正にならないための必要条件は

$$e^{-\rho t} B_t v'(B_t r_t^*) = C, \quad 0 \leqq t \leqq T^* \tag{27}$$

ここで C は定数である。これと(1 a),(1 b),(20 c)より $r_{T^*}^* > \frac{r}{B^{T^*}}$ に対して

$$r_t^* = \frac{1}{B_t} v'^{-1} \left[e^{\rho(t - T^*)} \frac{B_{T^*}}{B_t} v'(B_{T^*} r_{T^*}^*) \right], \quad 0 \leqq t \leqq T^* \tag{28}$$

が得られ，r_t^* は連続関数となり，制約条件を満足する。(1 b)，(20 c)，(28)から $B_t r_t^*$ は増加することはない。もし $r_{T^*}^*$ が与えられれば，(28)における解 r_t^* は一意的に決まり，そしてそれぞれの t において，r_t^* は微分可能で，与えられた $r_{T^*}^*$ の増加関数である。そして (1 d)，(27)，(22)から

$$\begin{aligned} &\lim_{B_{T^*} r_{T^*}^* \to \underline{r}} \int_0^{T^*} r_t^* dt = \lim_{B_t r_t^* \to \underline{r}} \int_0^{T^*} r_t^* dt \\ &\quad = \int_0^{T^*} \frac{\underline{r}}{B_t} dt < \underline{r} \int_0^{\bar{T}} \frac{1}{Bt} dt = R \end{aligned} \tag{29}$$

また(28)より十分に大きな $r^*_{T^*}$ に対して

$$\int_0^{T^*} r^*_t dt > R$$

それ故，

$$\int_0^{T^*} r^*_t dt = R \tag{30}$$

を満足する一意的な $r^*_{T^*}$ が存在し，(28)，(29)から

$$r^*_t > \frac{r}{B_t},\quad 0 \leqq t \leqq T^*$$

次に r^*_t が一意的に最適であることを証明するために，ある $t_0 \in [0, T^*]$ において $r_{t_0} \neq r^*_{t_0}$ となるような任意の実行可能解を r_t としよう。すると r_t と r^*_t の連続性により，t_0 のある近傍 τ のすべての t において $r_t \neq r^*_t$ となる。(1 b）によって

$t \in \tau$ において $v(B_t r_t) - v(B_t r^*_t) < B_t(r_t - r^*_t) v'(B_t r^*_t)$

$t \in [0, T^*] - \tau$ において $v(B_t r_t) - v(B_t r^*_t) \leqq B_t(r_t - r^*_t) v'(B_t r^*_t)$

従って，(27)，(23)，(30)より次の関係を得る。

$$V[\rho, T^*, (r_t)] - V[\rho, T^*, (r^*_t)] = \int_0^{T^*} e^{-\rho t}[v(B_t r_t) - v(B_t r^*_t)] dt$$

$$< \int_0^{T^*} (r_t - r^*_t) e^{-\rho t} B_t v'(B_t r^*_t) dt$$

$$= e^{-\rho T^*} B_{T^*} v'(B_{T^*} r^*_{T^*}) \int_0^{T^*} (r_t - r^*_t) dt \leqq 0$$

それ故，r^*_t は与えられた T^* に対して一意的な最適解である。

これまで T^* を固定したものと考えてきたが，ここより T^* を変数として考える。そして T^* の代りに T，r^*_t の代りに r^T_t と書くことにする。r^T_t は $0 \leqq t \leqq T < \bar{T}$ において T に関して微分可能であるので，$V_T = V[\rho, T, (r^T_t)]$ も微分可能となり，(27)より

$$\frac{dV_T}{dT} = e^{-\rho T} v(B_T r^T_T) + \int_0^T e^{-\rho t} v'(B_t r^T_t) B_t \frac{dr^T_t}{dT} dt$$

$$= e^{-\rho T} v(B_T r^T_T) + e^{-\rho T} B_T v'(B_T r^T_T) \int_0^T \frac{dr^T_t}{dT} dt$$

しかし(30)より

$$0=\frac{dR}{dT}=r_T^T+\int_0^T \frac{dr_t^T}{dT}dt$$

であるので，次の式を得る。

$$e^{\rho T}\frac{dV_T}{dT}=v(B_T r_T^T)-B_T r_T^T v'(B_T r_T^T)$$

ここで

$$\frac{v(B_T r_T)}{B_T r_T}=v'(B_T r_T) \tag{31}$$

となるような r_T を $\hat{r}_T$ と定義しよう。すると

$$\frac{d(B_T\hat{r}_T)}{dT}=0 \tag{32}$$

そして $r_t>\frac{r}{B_t}$ に対して

$$\frac{d[v(B_t r_t)-B_t r_t v'(B_t r_t)]}{d(B_t r_t)}=-B_t r_t v''(B_t r_t)>0$$

であるので，(31)によって

$$B_T r_T^T\begin{bmatrix}<\\=\\>\end{bmatrix}B_T\hat{r}_T \text{ に対して，} \frac{dV_T}{dT}\begin{bmatrix}<\\=\\>\end{bmatrix}0 \tag{33}$$

また(28)を(30)に代入し，Tで微分し，移項すれば，（20 c ）より次の関係を得る。

$$\frac{d(B_T r_T^T)}{dT}=\frac{-r_T^T}{v''(B_T r_T^T)B_T\int_0^T \frac{1}{B_t^2 v''(B_t r_t^T)}e^{\rho(t-T)}dt}+\frac{v'(B_T r_T^T)\left(\rho-\frac{\dot{B}_T}{B_T}\right)}{v''(B_T r_T^T)}<0$$

ここで $r_T^T=\hat{r}_T$ となるようなTを T_ρ とすると，

$$T\begin{bmatrix}>\\=\\<\end{bmatrix}T_\rho \text{ ならば，} B_T r_T^T\begin{bmatrix}<\\=\\>\end{bmatrix}B_T\hat{r}_T \tag{34}$$

故に，(33)，(34)から

$$T\begin{bmatrix}>\\=\\<\end{bmatrix}T_\rho \text{ ならば，} \frac{dV_T}{dT}\begin{bmatrix}<\\=\\>\end{bmatrix}0$$

すなわち，Tが T_ρ の時に V_T は一意的に最大値をもつ。証明終

このようにして存在することが証明された最適解は(28)，(30)，(31)を満足する。これよりこの最適解の性質を考察する。

定理 4

(i) $\dfrac{dT}{d\rho}<0$

(ii) $\dfrac{\dot{B}_t}{B_t}<\rho$ の時, $\dfrac{d\tilde{r}_t}{dt}<0$, $\dfrac{dr_t}{dt}<0$

$\dfrac{\dot{B}_t}{B_t}=\rho$ の時, $\dfrac{d\tilde{r}_t}{dt}=0$, $\dfrac{dr_t}{dt}\leqq 0$

証明

(i) (28)を(30)に代入し, ρ に関して微分し移項すると

$$\frac{dT}{d\rho}=\frac{B_T v'(\tilde{r}_T)\int_0^T \frac{T-t}{B_t^2 v''(\tilde{r}_t)}e^{\rho(t-T)}dt}{r^T+B_T\left[v''(\tilde{r}_T)\frac{d\tilde{r}_T}{dT}-v'(\tilde{r}_T)\left(\rho-\frac{\dot{B}_T}{B_T}\right)\right]\int_0^T \frac{1}{B_t^2 v''(\tilde{r}_t)}e^{\rho(t-T)}dt}$$

(20 c), (32)から $\dfrac{dT}{d\rho}<0$。

(ii) (27)を t で微分し, 移項すると

$$\frac{d\tilde{r}_t}{dt}=\frac{v'(\tilde{r}_t)\left(\rho-\frac{\dot{B}_t}{B_t}\right)}{v''(\tilde{r}_t)} \tag{35}$$

故に, $\dfrac{\dot{B}_t}{B_t}<\rho$ の時 $\dfrac{d\tilde{r}_t}{dt}<0$, そして $\dfrac{\dot{B}_t}{Bt}=\rho$ の時 $\dfrac{d\tilde{r}_t}{dt}=0$。また $\tilde{r}_t=B_t r_t$ より

$$\frac{dr_t}{dt}=\frac{1}{B_t}\frac{d\tilde{r}_t}{dt}-\frac{\dot{B}_t}{B_t}r_t$$

故に $\dfrac{\dot{B}_t}{B_t}<\rho$ の時 $\dfrac{dr_t}{dt}<0$, そして $\dfrac{\dot{B}t}{Bt}=\rho$ の時 $\dfrac{dr_t}{dt}\leqq 0$。

(i)は割引率が増加すると枯渇する時期が早められることを意味する。これは定理2の(i)と同じ結果である。(ii)は次のことを意味する。技術進歩率が割引率より小さい時, 効率単位でも自然単位でも資源の使用量は時間と共に減少し, そして技術進歩率が割引率に等しい時, 資源使用量は効率単位では変化しないけれども, 自然単位では減少するか不変である。技術進歩率が割引率より大きい場合には, 最適解の存在は証明していないけれども, (35)から効率単位による資源使用量は時間と共に増加する。なお $\rho=0$ の時は (20 b), (20 c) より $\dfrac{\dot{B}t}{Bt}$

＝0 となり，技術進歩の率が割引率に等しく，効率単位においても自然単位においても資源使用量は不変となる。

4. おわりに

資本の総量を増加させる技術進歩の場合には，技術進歩 $\dot{A}_t$ が一定であるという仮定を置くことにより，技術進歩が増加する時，枯渇時期が延長されたり，枯渇時期における資源使用量が減少する傾向があることが導き出された。しかし資源の使用効率を高める技術進歩の場合には，技術進歩率$\frac{\dot{B}_t}{B_t}$が一定であるという仮定を置いても，技術進歩が与える影響の何ら明確な特性を得ることができなかった。これが，二つの違った型の技術進歩が示した特性の対照であった。

この小論においては社会的効用が資源のみから成ると仮定したけれども，資本，労働などの他の生産要素を取り入れたモデルを考える必要がある。そしてMalthus 希少性でなく，Ricardo 希少性を持つ資源の場合も考察すべきであろう。

参考文献

〔1〕 Barnett, H. J. and Morse, C., Scarcity and Growth, Johns Hopkins Press, 1963.

〔2〕 Beckmann, M. J., "A Note on the Optimal Rates of Resource Exhaustion", Review of Economic Studies, Symposium, 1974, pp. 121—122.

〔3〕 Koopmans, T. C., "Proof for a Case where Discounting Advances the Doomsday", Review of Economic Studies, Symposium, 1974, pp. 117—120.

〔4〕 Stiglitz, J., "Growth with Exhaustible Natural Resources : Efficient and Optimal Growth Paths", Review of Economic Studies, Symposium, 1974, pp. 123—137.

〔5〕 Vousden, N., "Basic Theoretical Issues of Resource Depletion", Journal of Economic Theory, 6, 1973, pp. 126—143.