

非定常局部熱発生近傍の微小き裂の熱応力拡大係数*

五嶋孝仁*¹, 宮尾嘉寿*¹, 中林秀明*²Stress Intensity Factors of a Small Crack near the Transient
Partial Heat Source

Takahito GOSHIMA, Kaju MIYAO and Hideaki NAKABAYASHI

The stress intensity factors of a small crack have been analyzed when an infinite plate is step-functionally heated in a circular region near the crack tip. The stress solution can be obtained by superposing the stress disturbance by the crack on the transient thermal stresses due to the heat source in an infinite plate. The problem is reduced to a singular integral equation which satisfies the boundary condition on the crack face. The numerical results of stress intensity factors are obtained for the case of a uniformly distributed heat source. The effects of the location of the heat source on the variations of stress intensity factors are considered.

Key Words: Elasticity, Thermal Stresses, Crack, Stress Intensity Factor, Transient Heating, Partial Heating, Infinite Plate

1. 緒 言

局部的に非定常加熱される板の加熱領域外の引張応力が生ずる領域に欠陥があれば、大きな引張りの応力集中が生じ、き裂の発生原因ともなりうる。このため小泉ら⁽¹⁾は局部加熱される無限板の非加熱部に円孔を有する非定常熱応力について、野田ら⁽²⁾は瞬間点熱源による中空円板の非定常熱応力について解析し、いずれも円孔面で大きな引張りの応力集中を確認している。さらに局部加熱近傍の引張応力領域にき裂を有する非定常熱応力に関しては、今井ら⁽³⁾や森田ら⁽⁴⁾が点熱源や円形状面熱源の近傍に半無限長き裂がある無限板の解析を行っている。しかしここで扱っているような半無限長き裂はあまり実際的とは言えず、むしろ実際には微小き裂を有する場合のほうが多いと思われる。

そこで本研究では比較的短い直線き裂を有する無限板がそのき裂の近傍で時間とともにステップ状に変化する円形領域の軸対称熱源によって局部加熱されるとき、無限板に生ずる非定常熱応力によるき裂先端の応

力拡大係数を解析した。とくにここではき裂が短いと仮定しているのでき裂による温度場のかく乱は無視し、また材料の物性値は温度に依らず一定と仮定した。解析はき裂のない無限板の非定常熱応力解に、き裂による応力場のかく乱の解を重ね合わせ、き裂面での境界条件を満足する積分方程式を導いて応力拡大係数を求めた。さらに一様分布の円形熱源の場合について数値計算を行い、熱源の位置が応力拡大係数の変動に及ぼす影響を数値的に検討した。

2. 加熱条件と境界条件

図1に示すように長さ c のき裂を有する無限板が、き裂先端近傍で時間とともにステップ状に変化する軸対称分布の円形領域熱源によって局部加熱されている。解析にあたってはき裂先端 O を原点とした座標系 (\bar{x}, \bar{y}) (r, θ) および熱源中心 O_1 を原点とした座標系 (r_1, ϕ) を採用し、さらに次の無次元変数を用いて以下の解析を行う。

$$(x, y) = (\bar{x}/a, \bar{y}/a), \quad \rho = r/a, \quad \rho_1 = r_1/a$$

$$\xi = b/a, \quad \eta = c/a, \quad \tau = xt_0/a^2, \quad z = x + yi$$

ここで、 $i^2 = -1$, t_0 は時間, κ は温度伝導率, a は熱源半径, b はき裂先端と熱源中心を結ぶ線分 OO_1 の距離, β はき裂延長線と線分 OO_1 となす角度を表す。

* 原稿受付 平成2年5月17日。

*¹ 正員, 富山大学工学部 (〒930 富山市五福3190)。*² 学生員, 富山大学大学院。

無限板は初め室温で一様な温度であるとし、そのときの温度を基準にして測った温度を T とする。またき裂は微小であると仮定しているのでき裂による温度場のかく乱を無視すれば、温度に関する初期条件および境界条件は次式ようになる。

$$(T)_{\tau=0} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$(T)_{x,y \rightarrow \pm\infty} = 0, (\tau > 0) \dots\dots\dots (2)$$

また、き裂面には内圧も摩擦力も働いていないとすれば、力学的境界条件は次式ようになる。

$$(\sigma_{ij})_{x,y \rightarrow \pm\infty} = 0, (i, j = x, y), (\tau > 0) \dots\dots\dots (3)$$

$$(\sigma_{xy})_{y=\pm 0} = 0, (0 < x < \eta), (\tau > 0) \dots\dots\dots (4)$$

$$(\sigma_{yy})_{y=\pm 0} = 0, (x \in x_{op}), (\tau > 0) \dots\dots\dots (5)$$

ここで x_{op} はき裂の開口領域を示すが、 x_{op} は熱源位置や時間によって変化する。

3. 応力解析

一般に応力 σ_{ij} は次式のように、き裂のない無限板の非定常熱応力 σ_{ij}^0 に、き裂による応力場のかく乱 σ_{ij}^1

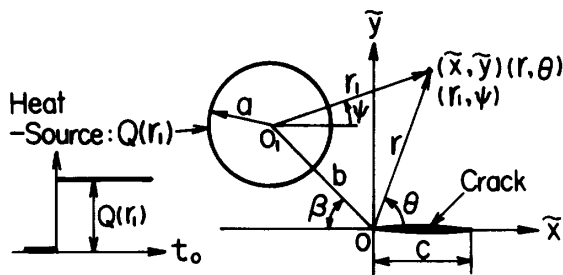


図 1 座標系と加熱条件

を重ね合わせて求めることができる。

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1, (i, j = x, y) \dots\dots\dots (6)$$

まず、き裂のない無限板の非定常熱応力解は、 (ρ_1, ϕ) 座標系でハンケル変換を利用して容易に求めることができ⁽⁵⁾、さらに Neumann の加法定理を用いて (ρ, θ) 座標系に座標変換すれば、条件式(1), (2), (3) を満足する非定常熱応力解が次式のように求まる。

$$\sigma_{ij}^0 = \int_0^\infty A(\tau) \sum_{n=0}^\infty \{ \delta_{ij}^n J_n(\xi\xi) C_{ij}^n \cos(n\pi) \} d\xi, (i, j = r, \theta) \dots\dots\dots (7)$$

ここで

$$A(\tau) = E\alpha\bar{Q}(\xi)(1 - e^{-\xi^2\tau})/\xi^3 \dots\dots\dots (8)$$

$$C_{rr}^n = -\{n(n-1)J_n(\rho\xi)/\rho^2 + \xi J_{n+1}(\rho\xi)/\rho\} \cos(\theta + \beta)n \dots\dots\dots (9)$$

$$C_{\theta\theta}^n = \{n(n-1)/\rho^2 - \xi^2\} J_n(\rho\xi) + \xi J_{n+1}(\rho\xi)/\rho \cos(\theta + \beta)n \dots\dots\dots (10)$$

$$C_{r\theta}^n = \{n(n-1)J_n(\rho\xi)/\rho^2 + n\xi J_{n+1}(\rho\xi)/\rho\} \sin(\theta + \beta)n \dots\dots\dots (11)$$

$$\bar{Q}(\xi) = \frac{a^2}{K} \int_0^1 \rho_1 Q(\rho_1) J_0(\rho_1 \xi) d\rho_1 \dots\dots\dots (12)$$

$$\delta_{ij}^n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2, & n \geq 1 \end{cases}$$

ここで α は線膨張係数、 E は縦弾性係数、 K は熱伝導率また $J_n(\)$ は n 次の第 1 種ベッセル関数を表す。

一方、き裂による応力を求めるために、き裂上の任意点 $x = x_0$ で次式で定義される 1 個の転位を考える。

$$g = E\{[U_{xx}] + i[U_{yy}]\}/(8\pi ia) \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $[U_{ii}]$ は変位の不連続量を表す。この転位 g による応力は次式のような Muskhelishvili の応力関数を用いることによって求められる⁽⁶⁾。

$$\Phi(z) = \frac{g}{z - x_0}, \quad \Psi(z) = \frac{\bar{g}}{z - x_0} + \frac{gx_0}{(z - x_0)^2} \dots\dots\dots (14)$$

このとき、1 個の転位による応力 $(\sigma_{yy}^1 - i\sigma_{xy}^1)$ は次式のように与えられる⁽⁷⁾。

$$\sigma_{yy}^1 - i\sigma_{xy}^1 = \Phi(z) + \bar{\Phi}(z) + z\Phi'(z) + \bar{\Psi}(z) \dots\dots\dots (15)$$

ここで $\Phi'(z) = d\Phi(z)/dz$ で $\bar{\Phi}(z)$ および \bar{g} は $\Phi(z)$ および g の共役複素関数である。そこでき裂による応力 σ_{ij}^1 は、次式のようにこの転位をき裂に沿って連続分布させることにより得られる。

$$\sigma_{yy}^1 - i\sigma_{xy}^1 = \int_0^\eta (\sigma_{yy}^1 - i\sigma_{xy}^1) dx_0 \dots\dots\dots (16)$$

式(7)および式(16)を式(6)のように重ね合わせ、境界条件式(4), (5)に代入すれば次の特異積分方程式を得る。

$$2 \int_0^\eta \frac{g(x_0)}{x - x_0} dx_0 = -(\sigma_{yy}^0 - i\sigma_{xy}^0)_{y=\pm 0} \dots\dots\dots (17)$$

さらに式(14)の応力関数から導かれる変位はき裂のまわりで一価でなければならないので、次式を得る。

$$\int_0^\eta g(x_0) dx_0 = 0 \dots\dots\dots (18)$$

4. 数 値 計 算

本数値計算例では、簡単な場合として $Q(\rho_1) = Q_0$ (一定) ($\rho_1 < 1$) の場合を考える。このとき式(12)のハンケル積分は次式のようになる。

$$\hat{Q}(\xi) = T^* J_1(\xi) / \xi, \quad T^* = a^2 Q_0 / K \dots\dots\dots (19)$$

さて、本計算では式(17)、(18)の連立方程式を数値的に解くことにする⁽⁶⁾。いま

$$g(t) = \frac{EaT^*G(t)}{(1-t^2)^{1/2}} \dots\dots\dots (20)$$

$$t = 2x_0/\eta - 1, \quad s = 2x/\eta - 1 \dots\dots\dots (21)$$

と置き、積分区間 $-1 \leq t \leq 1$ を $2n$ 等分して節点 t_j ($j = 1 \sim 2n+1$) を決め、3節点ごとに Lagrange の補間を適用し、選点を $s_k = t_k + 1/2n$ ($k = 1 \sim 2n$) のように選べば、連立積分方程式(17)、(18)は $G(t_j)$ に関する次の連立一次方程式に帰着される。

$$-2 \sum_{j=1}^{2n+1} \{w_j(s_k)G(t_j)\} = f(s_k) \dots\dots\dots (22)$$

$$(k = 1, 2, \dots, 2n)$$

$$\sum_{j=1}^{2n+1} v_j G(t_j) = 0 \dots\dots\dots (23)$$

ここで

$$f(s) = \frac{1}{EaT^*} (-\sigma_{\theta\theta}^0 + i\sigma_{r\theta}^0)_{\theta=0, \rho=(s+1)\eta/2} \dots\dots\dots (24)$$

また、 $w_j(s_k)$ 、 v_j は Gerasoulis⁽⁶⁾ によって与えられている式と同じである。このとき、き裂先端における応力拡大係数は次式で表される。

$$K_I^0 - iK_{II}^0 = -\pi\sqrt{2c} EaT^* G(-1) \dots\dots\dots (25)$$

$$K_I^1 - iK_{II}^1 = \pi\sqrt{2c} EaT^* G(1) \dots\dots\dots (26)$$

ここで K^0 、 K^1 はそれぞれ両き裂先端 $x=0$ 、 η での応力拡大係数を表す。実際の数値計算においては、最初にき裂全領域が開口 ($x_{op} : 0 < x < \eta$) していると仮定

して式(22)、(23)を解き、式(13)より得られるき裂開口変位 U_{yy} が負となる領域で $\text{Re}(G(t_j)) = 0$ とおき、再び式(22)、(23)を解く。このような計算過程をき裂開口変位 $U_{yy} < 0$ の領域がなくなるまで繰返し、式(5)の x_{op} の領域を各時間ステップごとに決定する。本数値例ではどの時間ステップでも3回以下の繰返し計算で十分収束した。また選点数は $n=10$ で十分な精度が得られた。また以下ではき裂が短い例として、 $\eta = 0.2$ の場合について数値計算した。

まず、熱源とき裂間の距離を一定 ($\zeta = 1.3$) として角度 β が種々変化した場合について、モード I およびモード II の応力拡大係数の時間的変動をそれぞれ図2および図3に示す。いずれも時間とともに単調に増加し定常値に漸近している。図2よりモード I の応力拡大係数は熱源から遠い側のき裂先端での応力拡大係数 K_I^1 のほうが他のき裂先端での K_I^0 よりも常に大きくなり、 β が大きいほどその値は小さくなり早く定常値に漸近している。また図3よりモード II の場合は熱源に近い側のき裂先端での応力拡大係数 K_{II}^0 のほうが他のき裂先端での K_{II}^1 よりも常に大きくなり、 β が小さくなるほどその値は小さくなり早く定常値に漸近している。これは、熱源に近いき裂先端 O での温度が反対側のき裂先端における温度よりも常に大きいため、熱源円周方向引張応力のき裂を開く方向への効果が、熱源から遠い側のき裂先端のほうで大きくなり ($K_I^1 > K_I^0$)、一方熱源に近い側のき裂先端のほうが他のき裂先端に比べ温度が高く x 軸に関する温度場の非軸対称的傾向も強くなるのでせん断作用が大きくなり ($K_{II}^0 > K_{II}^1$) なるためと思われる。また、 β による影響をさらに詳しく検討するために、 $\zeta = 1.3$ で $\tau = 0.5$ 、 ∞ の2通りの場合について、モード I およびモード II の応力拡大

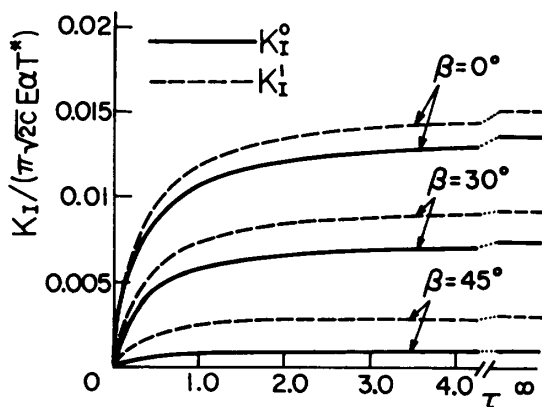


図 2 応力拡大係数 K_I の時間的変動 (β による影響)

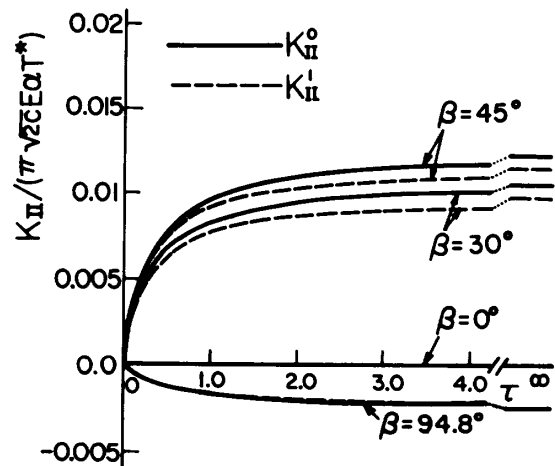


図 3 応力拡大係数 K_{II} の時間的変動 (β による影響)

係数の β による変化をそれぞれ図4および図5に示す。図4よりモードIの応力拡大係数は $\beta=0^\circ$ で最大を示し β の増加とともにその値は小さくなり、 β が $45^\circ \sim 50^\circ$ を越えると K_I は零となっている。これは $\beta=45^\circ$ 以上になると、熱源周りの円周方向引張応力のき裂を開く方向への効果が小さくなり、代わりに熱源半径方向圧縮応力のき裂を閉じる方向への効果のほうが大きくなっていくためと思われる。一方図5よりモードIIの応力拡大係数は β が約 45° で最大を示し、熱源中心がき裂線延長上にある場合 ($\beta=0^\circ$) や熱源がき裂中心の真上に位置する場合 ($\beta=90^\circ$) には、対称性のため K_{II} は零となっている。さらに β が 90° を越えて大

きになると、き裂が受けるせん断変形方向が逆になるので K_{II} の値も負となる。次に、熱源とき裂の角度を一定 ($\beta=45^\circ$) とし、熱源とき裂間の距離が種々変化した場合について、モードIおよびモードIIの応力拡大係数の時間的変動をそれぞれ図6および図7に示す。両き裂先端での応力拡大係数の大きさを比較すれ

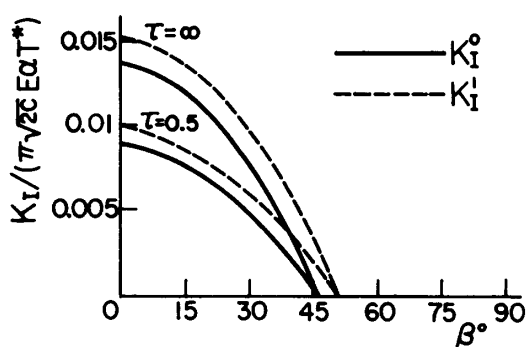


図4 応力拡大係数 K_I の β (角度) による変化

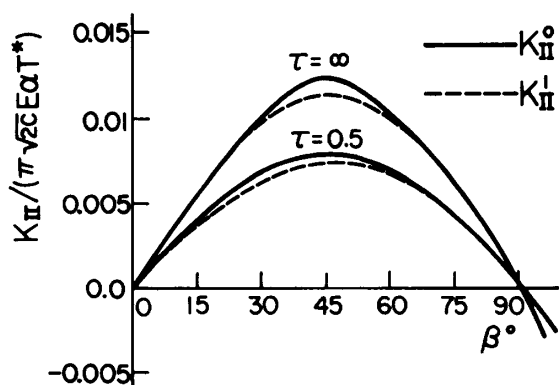


図5 応力拡大係数 K_{II} の β (角度) による変化

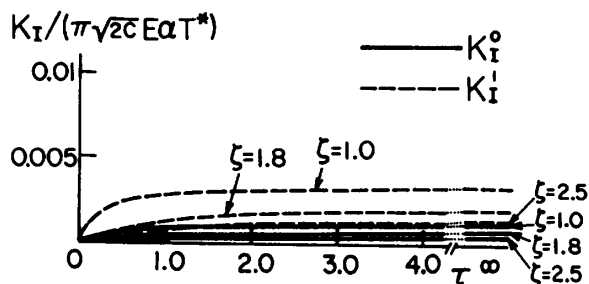


図6 応力拡大係数 K_I の時間的変動 (ζ による影響)

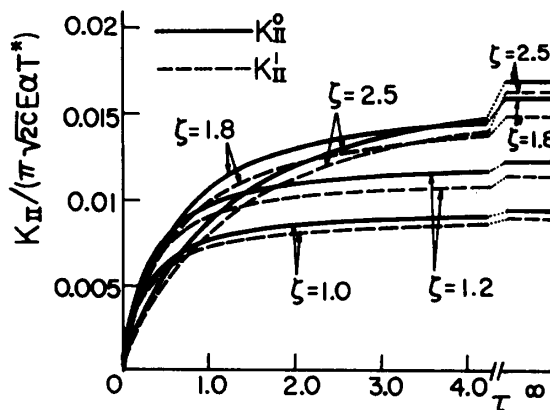


図7 応力拡大係数 K_{II} の時間的変動 (ζ による影響)

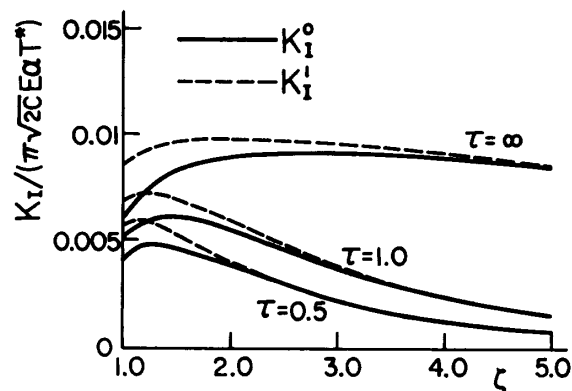


図8 応力拡大係数 K_I の ζ (距離) による変化

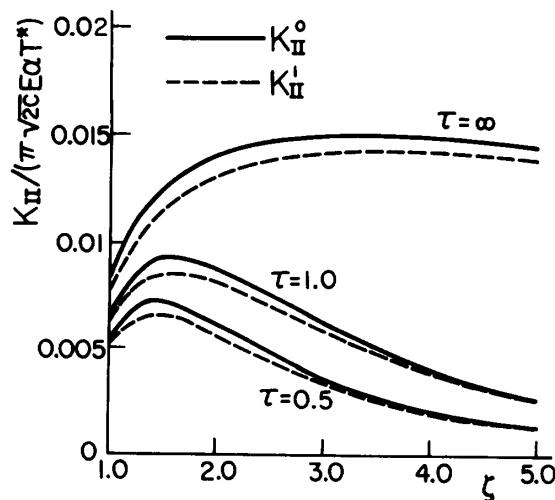


図9 応力拡大係数 K_{II} の ζ (距離) による変化

ば, $K_I^0 > K_I^1$, $K_{II}^0 > K_{II}^1$ となっており, ここでも図 2, 3 の場合と同様な傾向を示している。またいずれの応力拡大係数も時間とともに単調に増加し, ζ が小さくなるほど早く定常値に漸近している。そこで, ζ による影響をさらに詳しく調べるために, $\beta = 30^\circ$ で $\tau = 0.5, 1.0, \infty$ の 3通りの場合についてモード I およびモード II の応力拡大係数の ζ による変化をそれぞれ図 8 および図 9 に示す。いずれの場合も応力拡大係数の値は熱源がき裂から離れると次第に大きくなるがある距離で最大を示し, さらに熱源がき裂から遠ざかるに従って単調に減少している。いずれの場合も経過時間が小さいときには熱源がき裂近くにあるとき, 経過時間が大きくなるに従って熱源がき裂から遠ざかったときに応力拡大係数は最大を示している。図 8 より, 両き裂先端のモード I の応力拡大係数 K_I^0 , K_I^1 は, 本数値例では ζ の変化による傾向が若干異なり, 例えば $\tau = 1.0$ では K_I^0 は $\zeta \approx 1.5$ で, K_I^1 は $\zeta \approx 1.2$ で最大を示しており, $\tau = \infty$ では K_I^0 は $\zeta \approx 3.0$ で, K_I^1 は $\zeta \approx 1.8$ で最大を示している。一方図 9 より両き裂先端のモード II の応力拡大係数 K_{II}^0 , K_{II}^1 についてはその ζ による変化は類似しており, いずれも $\tau = 1.0$ では $\zeta \approx 1.5$ で, $\tau = \infty$ では $\zeta \approx 3.5$ で最大を示している。ここで, 図 8, 9 の挙動は, 熱源領域の外側のある位置で熱源領域の膨張の効果が最も大きくなり, 熱源周りの円周方向に最大の引張熱応力が生じ, 以後熱源から遠ざかるにしたがってその引張熱応力の値も減少していく傾向⁽⁵⁾⁽⁹⁾に対応しているものと思われる。

4. 結 言

有限長の直線き裂を有する無限板のき裂付近が, 時間とともにステップ状に変化する円形領域の軸対称分

布熱源によって非定常加熱されるとき, 両き裂先端での応力拡大係数を解析し, 得られた結果に基づいて熱発生分布が一様でき裂が短い場合について数値計算を行い, 次の結論を得た。

(1) 熱源から遠い側のき裂先端でのモード I の応力拡大係数は熱源に近いき裂先端でのそれよりも大きく, 熱源に近い側のき裂先端でのモード II の応力拡大係数は熱源から遠いき裂先端でのそれよりも大きくなる。

(2) 熱源中心がき裂線延長上にあるときモード I の応力拡大係数は最大になり, 熱源中心とき裂先端を結ぶ直線がき裂線となす角度 β が約 45° のときモード II の応力拡大係数は最大となる。

(3) 応力拡大係数はモード I, II とも, 経過時間が比較的小さい場合には熱源が比較のき裂に近いときに最大となり, 経過時間が大きくなるに従って熱源がき裂から離れたときに最大を示す。

(4) 応力拡大係数はモード I, II とも, 時間とともに単調に増加し, 熱源がき裂に近いほど早く定常値に漸近する。

文 献

- (1) 小泉・五嶋・中原, 機論(第1部), 42-359(1976), 2000.
- (2) 野田・竹内, 機論(第1部), 40-329(1974), 125.
- (3) 今井・ほか3名, 機論, 55-509, A(1989), 147.
- (4) 森田・今井, 機論, 56-524, A(1990), 850.
- (5) 竹内, 熱応力, (1971), 145, 155, 日新出版.
- (6) Dundurs, J., *Mathematical Theory of Dislocations*, (1975), 70, ASME Publication.
- (7) Muskhelishvili, *Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity*, (1954), 4th Ed., Noordhoff.
- (8) Gerasoulis, A., *Comput. Math. Applics.*, 8(1982), 15.
- (9) 五嶋・小泉・中原, 機論(第1部), 39-324(1973), 2358.