

線接触ハイポイドギヤに関する研究*

高橋 幸一^{*1}, 伊藤 紀男^{*2}Necessary Conditions for Hypoid Gearing
with a Contact Line

Koichi TAKAHASHI and Norio ITO

Hypoid gears are the most general form of gearing, and their theoretical solution has been long in coming. Many guesses or theorems about gearing have been proposed, some of them correct and many of them wrong. The tooth surfaces are parts of general curved surfaces and they must have principal directions and principal curvatures on every contact point. But there have been no discussions on such fundamental elements of the surface. This paper develops necessary conditions for determining these curvatures and principal directions for gearing with a contact line, introducing the concept of geodesic torsions.

Key Words: Machine Element, Gear, Hypoid Gear, Gear Mesh, Line Contact, Principal Curvature, Principal Direction, Geodesic Torsion

1. 緒 言

ハイポイドギヤのかみあいと言え、点接触かみあいであると決めつけられているきらいがある。同じ食違い軸歯車のねじ歯車の場合は、明らかに点接触かみあいである⁽¹⁾が、ねじ歯車の一方をウォームホイールのごとく歯切りすることは可能であり、この場合は、単純に点接触かみあいとして取扱うことはできない。このように、空間歯車においても線接触かみあいがあるいはそれに近い状態でのかみあいが可能であることは当然考えられる。しかし、これまでのかみあいに関する条件式と言え、歯面の接触点における共通法線ベクトルとその点における歯面間の相対速度ベクトルのスカラー積が零であるということのみであった。言い換えると、互いにかみあい運動をする一對の歯面の法線方向の速度成分が常に等しいということである。このような条件には、一對の歯面が線接触をするという必要十分条件は含まれていない。

そこで、本論文は、一組の歯車が線接触かみあいをするためには、従来の条件式のほかに、線接触に関する

条件が必要であることを明らかにする。具体的には、一組の互いに線接触かみあいをするハイポイドギヤに関し、そのピッチ点において、一對の歯面が線接触をするために必要な微分幾何学的な条件について考察し、これまでの考え方との相違を明確にする。

2. 歯面上の接触線と歯すじ

一組の歯車が線接触かみあいをするとき、歯面上の接触線は、歯車の回転とともに、互いに共役な歯面上を移動する。図1は、このような運動を一方の歯面 x_2 を固定し、それにかみあう相手歯面 x_1 を相対的にすべりころがり運動させた場合の図である。曲面でもある x_1, x_2 歯面はある時刻 t_0 において、曲線 $x(s, t_0)$ に沿って線接触する。微小時間 dt 後の時刻 t では、二曲

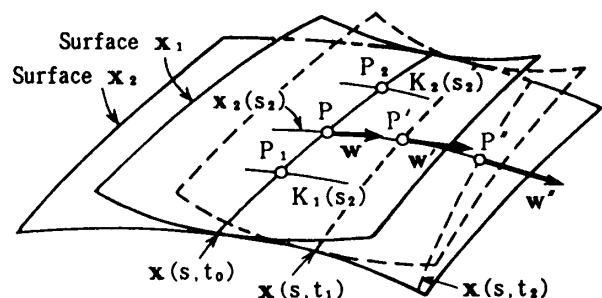


図1 共役歯面の接触線と滑り線

* 原稿受付 平成4年3月30日。

^{*1} 正員, 福井工業大学 (〒910 福井市学園3-6-1)。^{*2} 正員, 富山大学工学部 (〒930 富山市五福3190)。

面は新しい曲線 $x(s, t)$ に沿って接触する。曲線 $x(s, t_0)$ 上の各点には、二曲面の相対運動によって相対速度が生じる。同様に、曲線 $x(s, t)$ 上の各点にも同様に相対速度が生じる。いま、 $x(s, t_0)$ 上の考察点 P を原点とし、その点で線接触する共役な歯面間の相対速度ベクトルを w で表す。 dt 時間後の時刻を $t_1 = t_0 + dt$ とすると、原点 P を通っていた接触線は x_2 歯面上を移動して、次の接触線 $x(s, t_1)$ に達する。このとき x_2 歯面上の接触点 P は、 $x(s, t_1)$ 上では接触点 P' に移る。すなわち、接触点 P は x_2 歯面上を w 方向に弧長 ds_2 移動して、点 P' に達するというのである。点 P' における歯面間の相対速度ベクトルを w' で表せば、さらに dt 時間後の時刻 $t_2 = t_1 + dt$ においては、接触点 P' は相対速度 w' 方向に弧長 ds_2 移動して、点 P'' に達し、両歯面は接触線 $x(s, t_2)$ で接する。このことより、 x_2 歯面上には $\widehat{PP'P''}$ なる曲線が描かれることになる。これを曲線 $x_2(s_2)$ で表す。

次に、考察点を、点 P を通る $x(s, t_0)$ 上の点 P_i に移して考えれば、点 P, P', P'' と同様にして、点 P_i, P'_i, P''_i が得られる。これらの点を結んで曲線 $K_i(s_2)$ が得られる。このように点 P_i において相対速度に接しながら、接触線を横切る曲線 $K_i(s_2)$ を滑り線と呼ぶことにする。原点 P を通る滑り線を、特に歯すじ $x_2(s_2)$ として表す。考察点 P を接触線 $x(s, t_0)$ 上で無数にとれば、歯すじは無数に存在することになる。本論文は、歯面のほぼ中央の点 (mean point) を原点とし、その点を通る滑り線を歯すじ (spiral pitch line) として定義する。同様のことは、歯面 x_1 についても言え、 x_1 歯面上の歯すじを $x_1(s_1)$ として表す。

x_1, x_2 歯面間の接触線は時刻 t とともに空間を移動し、一つの軌跡面 $x(s, t)$ を形成する。また、歯すじ $x_1(s_1), x_2(s_2)$ を、それぞれの歯車軸の回りに回転したときに得られる回転面をピッチ面と定義する。ピッチ面が互いに一つの曲線に沿って接触するとき、その曲線をピッチ線と定義する。ピッチ線はピッチ点 P を通り、ピッチ面上における歯面間の接触点 P の軌跡であるから、歯面の接触線の軌跡面 $x(s, t)$ とピッチ面との交線として定義することもできる。

3. 歯面上の諸曲線と測地線の関係

3.1 歯面上の曲線に接する測地線 歯面上の接触線や歯すじは、歯面上の曲線と考えることができる。いま、一つの歯面を考え、その歯面上の点を考察点 P とし、考察点 P を通る任意の曲線を $x(s)$ とする。 s は点 P から曲線に沿った任意の点までの弧長である。曲線 $x(s)$ を一つの空間曲線と考え、弧長 s の増加す

る方向に接線を引き、点 P におけるフルネ標構、すなわち単位接線ベクトル、単位主法線ベクトル、単位従法線ベクトルを ξ_1, ξ_2, ξ_3 で表す。点 P における曲線の曲率、およびねじり率を $1/\rho, 1/\tau$ とすると、フルネー・セレーの公式などにより、次の各式が得られる。

$$\xi_3 = \xi_1 \times \xi_2 \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{d\xi_1}{ds} = \frac{\xi_2}{\rho} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{d\xi_3}{ds} = -\frac{\xi_2}{\tau} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{d\xi_2}{ds} = -\frac{\xi_1}{\rho} + \frac{\xi_3}{\tau} \dots\dots\dots (4)$$

曲線に関する上記の関係式は、歯面上の測地線についても当然成り立つ。そこで、点 P を通る歯面上の測地線について考える。測地線を空間曲線として考えると、その単位主法線ベクトル ξ_2 と歯面の単位法線ベクトル n は一致する。

$$\xi_2 = n \dots\dots\dots (5)$$

これより、測地線の曲率、およびねじり率は歯面の測地線方向の性質を表すことになり、歯面の任意の点にける性質は、その点を通ってあらゆる方向に引かれた測地線によって構成される微小歯面の性質として表すことができる。すなわち、歯面上の測地線に関する法曲率と測地的ねじり率をもって、歯面を決定するための二要素とすることが可能である。

3.2 x_1, x_2 共役歯面の接触線 接触線 $x(s, t_0)$ に接する測地線の法曲率と測地的ねじり率を具体的に表すためには、考察点 P を通る歯面の主方向を定めなければならない。図2は、それらの関係を示した図である。相対速度 w 方向を表す歯すじ方向と x_1 歯面の主方向とがなす角度を δ_1 、 x_2 歯面上でのそれを δ_2 とする。図2では $i=1, 2$ として、歯面は x_i 、主方向は δ_i

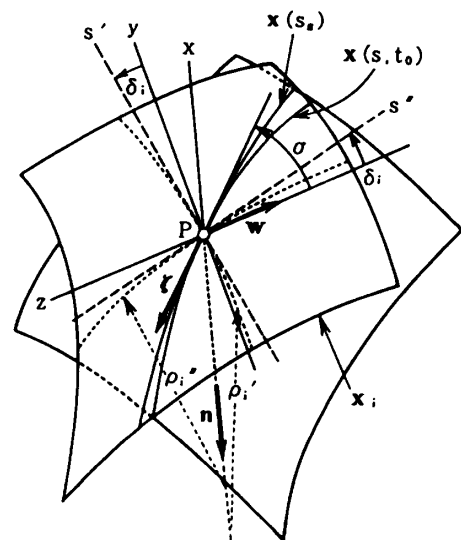


図2 歯面上の諸曲線と主方向

で表されている。直交する二つの主方向を s', s'' 軸で表し、歯面の法線 n の方向を x 軸で表せば、 $P-s's''x$ 座標系が成立する。歯面の点 P における一組の主曲率を $1/\rho'_1, 1/\rho''_1$ 、すなわち x_1 歯面に関しては $1/\rho'_1, 1/\rho''_1$ 、 x_2 歯面に関しては $1/\rho'_2, 1/\rho''_2$ とする。点 P で接触線 $x(s, t_0)$ 方向に引いた歯面の単位接線ベクトルを ξ とし、それが z 軸となす角を σ とすると、次式が成立する。

$$\frac{1}{\rho_s} = \frac{\sin^2(\sigma - \delta_1)}{\rho'_1} + \frac{\cos^2(\sigma - \delta_1)}{\rho''_1} = \frac{\sin^2(\sigma - \delta_2)}{\rho'_2} + \frac{\cos^2(\sigma - \delta_2)}{\rho''_2} \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{1}{\tau_s} = -\left(\frac{1}{\rho'_1} - \frac{1}{\rho''_1}\right) \sin(\sigma - \delta_1) \cos(\sigma - \delta_1) = -\left(\frac{1}{\rho'_2} - \frac{1}{\rho''_2}\right) \sin(\sigma - \delta_2) \cos(\sigma - \delta_2) \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $1/\rho_s, 1/\tau_s$ は、歯面の接触線と点 P で接する測地線 $x(s_\theta)$ の法曲率と測地的ねじり率である。測地線 $x(s_\theta)$ の原点 P における接線は $dx(s_\theta)/ds_\theta$ で表され、これは単位接線ベクトル ξ に一致する。測地線に沿った歯面の法線ベクトルを $n(s_\theta)$ 、接触線に沿った歯面の法線ベクトルを $n(s)$ とすると、原点 P の近傍では $n(s_\theta) = n(s)$ として扱うことができる。これより、空間曲線としての接触線の点 P での性質は、単位接線ベクトルを ξ_1 とすると、測地線との関係から、次式が成立する。

$$\left[\frac{dn(s)}{ds}\right]_P = -\frac{\xi_1}{\rho_s} + \frac{\xi_1 \times n}{\tau_s} \dots\dots\dots (8)$$

ここで $[\]_P$ は原点 P での値であることを示す。原点 P から弧長 ds_θ 離れた測地線上の点における法線ベクトルは $n(ds_\theta)$ であるが、 ds_θ は微小なため、 $n(ds)$ とし て表すと、次式が得られる。

$$n(ds) = n + \left[\frac{dn(s)}{ds}\right]_P ds \dots\dots\dots (9)$$

$\xi_1 = \xi$ であるから、式(8)は次式となる。

$$\left[\frac{dn(s)}{ds}\right]_P = -\frac{\xi}{\rho_s} + \frac{\xi \times n}{\tau_s} \dots\dots\dots (10)$$

以上により、原点 P を通る接触線の原点の近傍における性質は、式(9)、(10)によって表される。

3.3 線接触の条件 歯面 x_1 と x_2 が原点 P を通る

曲線 $x(s, t_0)$ に沿って接触する場合、その接触線の条件について考察する。接触線に沿って原点 P からの弧長 ds の点 P_{as} での相対速度ベクトルを $w(ds)$ とする。点 P_{as} において両歯面は接触しているのだから、その点における両歯面の共通法線ベクトル $n(ds)$ と $w(ds)$ は直交しなければならない。両歯面の角速度ベクトルを ω_1, ω_2 、相対角速度ベクトルを $\omega = \omega_1$

$-\omega_2$ とすると、 $w(ds), n(ds)$ は、次式で表される。

$$w(ds) = w + \omega \times \xi ds \dots\dots\dots (11)$$

$$n(ds) = n + \left(-\frac{\xi}{\rho_s} + \frac{\xi \times n}{\tau_s}\right) ds \dots\dots\dots (12)$$

点 P_{as} における接触の条件より、次式を得る。

$$w(ds) \cdot n(ds) = 0 \dots\dots\dots (13)$$

式(11)、(12)を用いると、次式が得られる。

$$w \cdot \left(-\frac{\xi}{\rho_s} + \frac{\xi \times n}{\tau_s}\right) + n \cdot (\omega \times \xi) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

図3は、ハイポイドギヤの歯面 x_1 と x_2 が原点 P を通る曲線 $x(s, t_0)$ に沿って接触している状態を示す。以後、添字 $i=1$ はピニオン、 $i=2$ はギヤを表すものとする。ここには、 $-w$ の向きに Z 軸、歯面を横切るピッチ平面上に X 軸、それらと垂直に Y 軸をとった運動学的座標系 $P-XYZ$ と、 Z 軸を共通とし、両歯面の接平面上に y 軸、歯面の共通法線 n 方向に x 軸をとった歯面座標系 $P-xyz$ が示してある。ここでも、 ξ と z 軸のなす角は σ である。点 P でのかみあい圧力角を ϕ 、歯すじは x_2 歯面の歯すじ $x_2(s_2)$ のみが示されている。

図4は、運動学的座標系 $P-XYZ$ の平面図(ピッチ平面)とその立面図(XY 平面)を示す。 ϕ_1, ϕ_2 はピニオン、ギヤの歯すじねじれ角を、 A_1, A_2 はピッチ円すい距離を、 a_1, a_2 は回転軸を表す単位ベクトルを、 v_1, v_2 は両歯面の原点における速度ベクトルを表す。点 P_1, P_2 は微小回転後の原点の位置を、点 P' は微小回転後の歯面間の新しい接点である。 v_n は、 v_1, v_2 の歯すじに直角な成分である。点 O_1, O_2 は二つの回転軸と Y 軸との交点を示す。 $v_1, v_2, \omega_1, \omega_2$ の大きさをそれぞれ $v_1, v_2, \omega_1, \omega_2$ とし、 γ, Γ をピニオン、ギヤのピッチ角とすると、次の各式が得られる⁽²⁾。

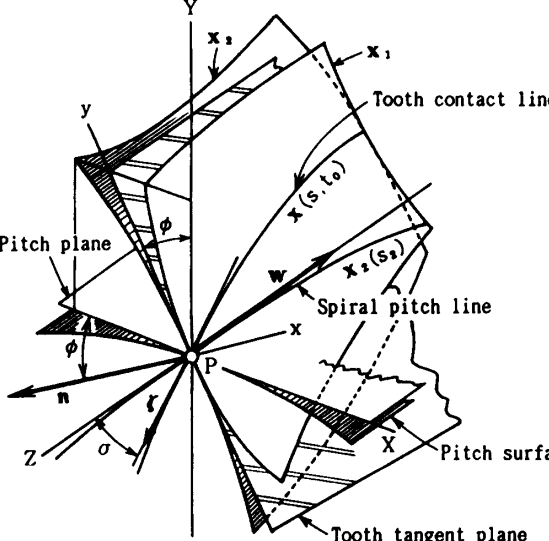


図3 歯面の接触線と座標系

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_1 &= v_1 \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \\ 0 \\ -\sin \phi_1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{v}_2 &= v_2 \begin{bmatrix} \cos \phi_2 \\ 0 \\ -\sin \phi_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

$$\mathbf{w} = v_n (\tan \phi_1 - \tan \phi_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_1 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma \sin \phi_1 \\ \sin \gamma \\ \cos \gamma \cos \phi_1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{a}_2 &= \begin{bmatrix} \cos \Gamma \sin \phi_2 \\ -\sin \Gamma \\ \cos \Gamma \cos \phi_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_1 &= \omega_1 \mathbf{a}_1 \\
 \boldsymbol{\omega}_2 &= \omega_2 \mathbf{a}_2
 \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

$$\boldsymbol{\omega} = v_n \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 \nu_1 &= \frac{\tan \phi_1}{A_1 \tan \gamma} + \frac{\tan \phi_2}{A_2 \tan \Gamma} \\
 \nu_2 &= \frac{1}{A_1 \cos \phi_1} - \frac{1}{A_2 \cos \phi_2} \\
 \nu_3 &= \frac{1}{A_1 \tan \gamma} + \frac{1}{A_2 \tan \Gamma}
 \end{aligned} \dots\dots\dots (20)$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

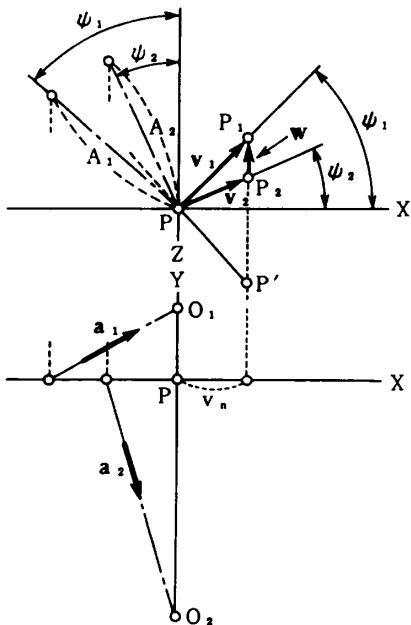


図 4 運動学的座標系

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \sin \sigma \sin \phi \\ -\sin \sigma \cos \phi \\ \cos \sigma \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

$$\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \sigma \\ -\cos \phi \cos \sigma \\ -\sin \sigma \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

以上の関係式を用いると、式(10)は次のようになる。

$$\left[\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} \right]_P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho_s} \sin \sigma \sin \phi + \frac{1}{\tau_s} \sin \phi \cos \sigma \\ \frac{1}{\rho_s} \sin \sigma \cos \phi - \frac{1}{\tau_s} \cos \phi \cos \sigma \\ -\frac{1}{\rho_s} \cos \sigma - \frac{1}{\tau_s} \sin \sigma \end{bmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

同様に、式(11)、(12)は、次式となる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}(ds) &= \mathbf{w} \\
 &+ v_n \begin{bmatrix} \nu_2 \cos \sigma + \nu_3 \sin \sigma \cos \phi \\ \nu_3 \sin \sigma \sin \phi - \nu_1 \cos \sigma \\ -\nu_2 \sin \sigma \sin \phi - \nu_1 \sin \sigma \cos \phi \end{bmatrix} ds
 \end{aligned} \dots\dots\dots (25)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}(ds) &= \mathbf{n} \\
 &+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho_s} \sin \sigma \sin \phi + \frac{1}{\tau_s} \sin \phi \cos \sigma \\ \frac{1}{\rho_s} \sin \sigma \cos \phi - \frac{1}{\tau_s} \cos \phi \cos \sigma \\ -\frac{1}{\rho_s} \cos \sigma - \frac{1}{\tau_s} \sin \sigma \end{bmatrix} ds
 \end{aligned} \dots\dots\dots (26)$$

以上の式より、 $w = |\mathbf{w}| = v_n (\tan \phi_1 - \tan \phi_2)$ であることより、式(25)、(26)を式(13)に代入して整理すると、次式が得られる。

$$\tan \sigma = \frac{-\frac{1}{\rho_s} + \frac{-\nu_1 \sin \phi + \nu_2 \cos \phi}{\tan \phi_1 - \tan \phi_2}}{\frac{1}{\tau_s} + \frac{-\nu_3}{\tan \phi_1 - \tan \phi_2}} \dots\dots\dots (27)$$

まがりばかさ歯車の場合は、 $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ となり、 $A_1 = A_2$ 、 $\nu_2 = 0$ であるから、式(27)は次式となる。

$$[\tan \sigma]_{\phi_1 = \phi_2} = \tan \phi \sin \phi \dots\dots\dots (28)$$

式(27)を書き換えると、次のようになる。

$$\tan \sigma = \frac{-\frac{1}{\rho_s} + p}{\frac{1}{\tau_s} + \lambda} \dots\dots\dots (29)$$

ここでは、計算を簡単にするために、次のような p, λ を用いている。

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{-\nu_1 \sin \phi + \nu_2 \cos \phi}{\tan \psi_1 - \tan \psi_2} \\ \lambda &= \frac{-\nu_3}{\tan \psi_1 - \tan \psi_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

次に、曲面 x_i の二要素である歯すじに接する測地線の法曲率と測地的ねじり率を $1/\rho_i, 1/\tau_i$ で表す。また、二曲面の主曲率を $1/\rho'_i, 1/\rho''_i$ とすると、オイラーの公式、および測地的ねじり率に関し、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_i} &= \frac{\sin^2 \delta_i}{\rho'_i} + \frac{\cos^2 \delta_i}{\rho''_i} \\ \frac{1}{\tau_i} &= \left(\frac{1}{\rho'_i} - \frac{1}{\rho''_i} \right) \sin \delta_i \cos \delta_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

式(6)、(7)を利用すると、式(29)は次のようになる。

$$\tan \sigma = \frac{-\frac{1}{\rho_i} + p}{-\frac{1}{\tau_i} + \lambda} \dots\dots\dots (32)$$

式(27)、(29)、(32)は接触線の方向を表す同じ σ の式である。これに関し E. Wildhaber 氏は、次の式を与えている⁽³⁾。

$$\tan \sigma = \frac{\sin(\phi - \phi_0)}{\cos \phi_0} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_3} \dots\dots\dots (33)$$

かさ歯車の場合、 $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ であり、限界圧力角 $\phi_0 = 0$ であるから、式(33)は成立する。しかし、同じハイポイドギヤの理論から誘導された式(32)は、式(33)とはその内容を異にする。それは、式(33)はねじり率の存在を無視して導かれたものであり、理論的には不十分なものと言える。 σ の値は歯切りの段取り計算に大きく関係する値であるため、その理論的な厳密性は歯当たりのデベロップ計算に大きく影響するものである。

以上のように、二つの曲面 x_1, x_2 が線接触のかみあい運動をする場合、接触線は時刻 t とともに空間を移動していくが、まず、原点において、両歯面は線接触しなければならない。その接触線の方向を示す角度 σ は式(32)によって決定される。したがって、歯面 x_1, x_2 の二要素間には、次の関係式が成立しなければな

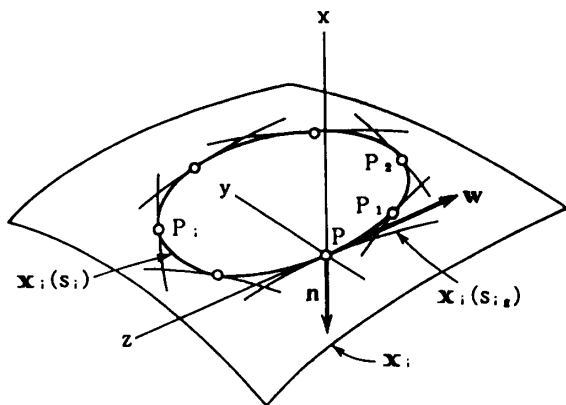


図5 歯面と歯すじの表示

らない。

$$\frac{-\frac{1}{\rho_1} + p}{-\frac{1}{\tau_1} + \lambda} = \frac{-\frac{1}{\rho_2} + p}{-\frac{1}{\tau_2} + \lambda} = \frac{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}}{\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}} \dots\dots\dots (34)$$

すなわち、二歯面 x_1, x_2 が線接触かみあいをすれば、式(34)が常に成り立つことである。

3.4 歯すじに接する測地線 3.2, 3.3節では、歯面と接触線の関係を3.1節で述べた測地線を利用して考察したが、ここでは、歯面と歯すじの関係をあらためて測地線を利用して考察する。

いま、図5のように、曲面 x_i 上の原点 P を通る歯すじを曲線 $x_i(s_i)$ で表す。点 P における曲面の単位法線ベクトルを n とし、その方向に x 軸、その点における相対速度 w 方向に z 軸、それらに垂直に y 軸をとる。この座標系は、図3の P-xyz 座標と同じものである。点 P において歯すじに接する測地線 $x_i(s_{i0})$ を引く。同様に、曲線 $x_i(s_i)$ 上の点 P_1, P_2, \dots, P_i においても、曲線に接する測地線を引く。曲面上には測地線によって描かれる多角形が形成される。分割する点の数を無数にとると、測地線による多角形は曲線 $x_i(s_i)$ に一致する。このことから、歯面上の歯すじの微小部分は、その部分に接する測地線の微小部分として扱うことができる。

さて、互いに線接触かみあいをする x_1, x_2 歯面上の歯すじ $x_1(s_1), x_2(s_2)$ は原点 P において互いに接する。原点において両歯すじ方向の歯面の単位接線ベクトルを、接触線のときと同様に ξ_1 で表す。原点 P で両歯すじに接する測地線を $x_1(s_{10}), x_2(s_{20})$ とする。原点の近傍では $ds_1 = ds_{10}, ds_2 = ds_{20}$ であるから、原点におけ

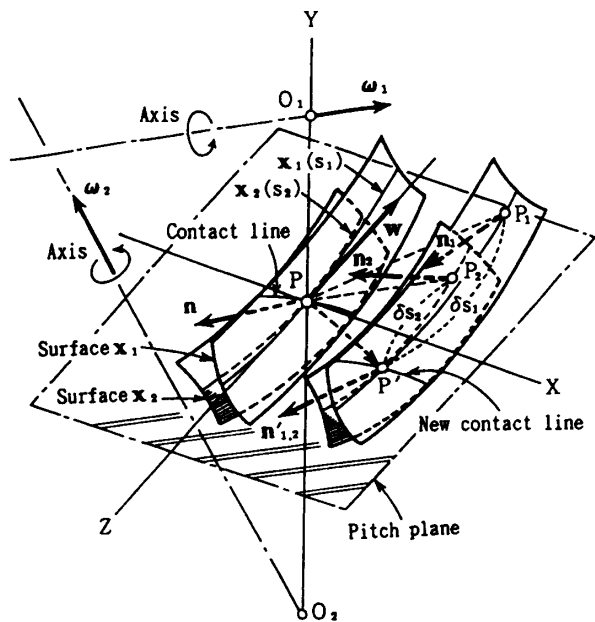


図6 ピッチ平面上の歯面の運動

る両歯面の法線ベクトルを n_1, n_2 とすると、式(4)と同様に、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{dn_1}{ds_1} \right]_P &= -\frac{\xi_1}{\rho_1} + \frac{\xi_1 \times n_1}{\tau_1} \\ \left[\frac{dn_2}{ds_2} \right]_P &= -\frac{\xi_2}{\rho_2} + \frac{\xi_2 \times n_2}{\tau_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

式中の ρ_1, ρ_2 , および τ_1, τ_2 は測地線 $x_1(s_{1g}), x_2(s_{2g})$ に関する法曲率半径, および測地的ねじり率半径である。また、原点においては、次式が成り立つ。

$$[n_1]_P = [n_2]_P = n \dots\dots\dots (36)$$

ξ_1 は歯すじ方向を表し、 z 軸方向に一致する。ここではこれをあらためて基本ベクトル k とおく。式(35)は、次のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{dn_1}{ds_1} \right]_P &= -\frac{k}{\rho_1} + \frac{k \times n}{\tau_1} \\ \left[\frac{dn_2}{ds_2} \right]_P &= -\frac{k}{\rho_2} + \frac{k \times n}{\tau_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

3・5 線接触かみあい運動

図6は、原点 P を通る接触線に沿って二曲面 x_1, x_2 が線接触し、微小時間 dt 後においても、引き続きかみあいながら点 P' を通る接触線に沿って線接触している図である。点 P' を接触線とピッチ平面との交点とすれば、点 P' は原点 P を通る一対の歯すじ $x_1(s_1), x_2(s_2)$ の微小回転後の新しい接触点となる。原点 P で接していた両歯すじ上の点 P は、微小回転後それぞれ点 P_1, P_2 に移動する。したがって、 $\widehat{PP_1}$ と $\widehat{PP_2}$ は、歯すじの接触点が移動した弧長 ds_1, ds_2 となる。

図7は、図6のピッチ平面上の関係を詳細に示した図である。原点における両歯面の速度は v_1, v_2 であるから、 $\overrightarrow{PP_1} = v_1 dt, \overrightarrow{PP_2} = v_2 dt$ となる。 $\overrightarrow{PP'}$ をベクトル

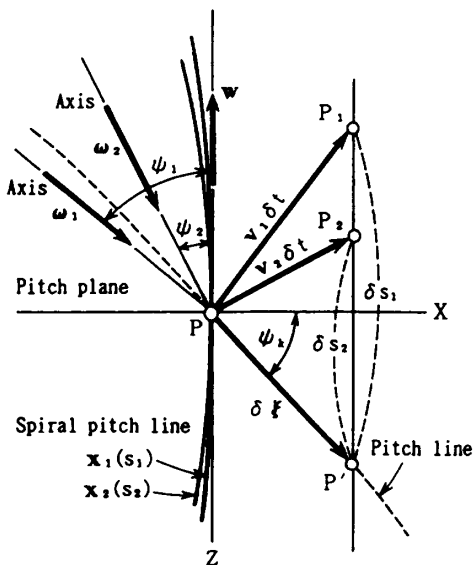


図7 微小回転によるピッチ点 P, P' の移動

ル $d\xi$ で表し、 $d\xi$ が x 軸となす角を ψ_k とする。 $d\xi = |d\xi|$ とすると、図7より、次式が得られる。

$$d\xi = d\xi \begin{bmatrix} \cos \psi_k \\ 0 \\ \sin \psi_k \end{bmatrix} \dots\dots\dots (38)$$

一方、図6で両歯面は dt 時間の間に、それぞれ $\omega_1 dt, \omega_2 dt$ だけ回転する。点 P における歯面の単位法線ベクトル n も同じ角度回転し、点 P_1, P_2 で n_1, n_2 となる。さらに n_1, n_2 はそれぞれの歯すじに沿って移動し、点 P' において n'_1, n'_2 となる。このとき次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} n'_1 &= n + \omega_1 \times n dt + \left[\frac{dn_1}{ds_1} \right]_P ds_1 \\ n'_2 &= n + \omega_2 \times n dt + \left[\frac{dn_2}{ds_2} \right]_P ds_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

点 P' においても歯面 x_1, x_2 が接触するためには、 n'_1 と n'_2 の方向は一致しなければならない。

$$n'_1 \times n'_2 = 0 \dots\dots\dots (40)$$

次に、図7の点 P' における相対速度 w' は、次式によって表される。

$$w' = w + \omega \times d\xi \dots\dots\dots (41)$$

同様に、 $d\xi$ についても、次式が成り立つ。

$$d\xi = v_i dt - \frac{w}{w} ds_i \dots\dots\dots (42)$$

点 P' においても引続かみあうためには、次式が成立しなければならない。

$$n'_1 \cdot w' = 0 \dots\dots\dots (43)$$

式(39)~(42)を用いて、式(43)を $\psi_1 \neq \psi_2$ として整理すると、次の一般式が成立する。

$$\frac{1}{\rho_1 - p} - \frac{1}{\rho_2 - p} = \frac{1}{q} \dots\dots\dots (44)$$

$$\frac{\frac{1}{\tau_1}}{\rho_1 - p} - \frac{\frac{1}{\tau_2}}{\rho_2 - p} = \frac{\lambda}{q} \dots\dots\dots (45)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\nu_4 \cos \phi + \nu_3 \cos \epsilon' \sin \phi}{\cos \psi_1 \cos \psi_2 (\tan \psi_1 - \tan \psi_2)^2} \\ \epsilon' &= \psi_1 - \psi_2 \\ \nu_4 &= \frac{\sin \psi_1}{A_2} - \frac{\sin \psi_2}{A_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

$d\xi$ の方向を示す ψ_k は、ピッチ線方向を示すものであるが、これも同様の計算によって、次のように求められる。

$$\tan \psi_k = \frac{q(\tan \psi_1 - \tan \psi_2)}{\frac{1}{\rho_i} - p} - \tan \psi_i \dots\dots\dots (47)$$

4. 必要条件の考察

4.1 歯面三要素決定の必要条件 歯面 x_1, x_2 が一組の歯車に歯付けされた場合を考える。両歯面が歯すじに沿って連続的に、かつ定速比でかみあうためには、式(44)、(45)が必要条件である。さらに、有限の歯だけをもつ歯面同士が線接触しながらかみあうためには、もう一つの必要条件を満たさなければならない。すなわち、一つの曲面が与えられると、微分幾何学的には、その考察点において、曲面の主方向を表す角度 δ_i と一組の主曲率 $1/\rho_i, 1/\rho_i''$ が決定される。したがって、二歯面の一方が与えられると、三つの未知数が決定され、それと線接触かみあいをする相手歯面の三つの要素を決めるためには、式(44)、(45)の外にもう一つの関係式が必要となる。そこで、式(32)より σ の値が求められるので、式(6)、(7)、(31)より、次の関係式が得られる。

$$\tan 2\delta_1 = \frac{\frac{1}{r_1} \tan 2\sigma}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} \tan 2\sigma \cot 2\delta_2} \dots\dots\dots(48)$$

式(48)は、 δ_1 と δ_2 の関係式であるから、一方を与えれば、他方は求められる。 δ_1, δ_2 が決定すれば、次の主曲率に関する式を利用することができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1'} &= \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{r_1} \cot \delta_1 \\ \frac{1}{\rho_1''} &= \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{r_1} \tan \delta_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(49)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_2'} &= \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{r_2} \cot \delta_2 \\ \frac{1}{\rho_2''} &= \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{r_2} \tan \delta_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50)$$

以上により、 x_1, x_2 歯面の一方が与えられると、式(48)~(50)によって、 σ をパラメータとして、相手歯面に関する三つの要素は決定されることになる。したがって、線接触に関する必要条件式は式(44)、(45)、(32)の三式となる。これら三式が歯面の全範囲で満足されるとき、十分条件が成立する。

4.2 限界曲率半径と限界圧力角 必要条件の式(44)、(45)の右辺は、 $q \neq 0$ として計算されたが、 $q=0$ の場合について検討を加えておかななければならない。いま、 $q=0$ とすると、式(46)の q の式から、次式が得られる。

$$\nu_4 \cos \phi + \nu_3 \cos \epsilon' \sin \phi = 0 \dots\dots\dots(51)$$

$q=0$ のときの圧力角を $[\phi]_{q=0} = \phi_0$ として、式(51)を書き換えると、次の式が得られる。

$$\tan \phi_0 = - \frac{\frac{\sin \psi_1}{A_2} - \frac{\sin \psi_2}{A_1}}{\frac{1}{A_1 \tan \gamma} + \frac{1}{A_2 \tan \Gamma}} \cdot \frac{1}{\cos \epsilon'} \dots\dots\dots(52)$$

また、式(44)において、 $q=0$ の場合、左辺の分母も零とならなければならないので、次の関係式を得る。

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = p = \frac{-\nu_1 \sin \phi_0 + \nu_2 \cos \phi_0}{\tan \psi_1 - \tan \psi_2} \dots\dots\dots(53)$$

ここで、 $[1/\rho_1]_{\phi=\phi_0} = [1/\rho_2]_{\phi=\phi_0} = 1/r_c$ とおけば、 $q=0$ の近傍での ρ_1, ρ_2 と r_c の関係は、 ρ_1, ρ_2 が r_c に近づき、やがて r_c に一致し、 r_c を遠ざかっていくという関係を示している。その際、 ρ_1 と ρ_2 の相対曲率の符号は逆転し、干渉を起こすことになる。これは平歯車における零圧力角のピッチ点での歯形干渉と同様である。ここに、 ϕ_0 は限界圧力角と名付けられ、平歯車における零圧力角に相当する。また、 r_c の値の両側では ρ_1, ρ_2 の実質部分の関係が逆転するため、ハイポイドギヤの歯形は半径 r_c の値を境として、その両側の値を駆動側、被動側として使用しなければならない。この r_c は限界曲率半径と呼ばれ、設計の段階でカット半径と限界半径とが一致するように配慮しなければならない。

5. 結 論

ハイポイドギヤは、他の歯車と同様に、線接触かみあいをすべき歯車である。クラウニング歯当たりが必要であれば、線接触歯車を基本にして調整されるべきである。

本論文は、一組の歯面 x_1, x_2 がハイポイドギヤ歯面として与えられたとき、それらが線接触かみあいをするために必要な条件式について考察した。まず、考察点を定め、その点で線接触かみあいをするために必要な微分幾何学的な歯面の三つの要素として、一組の主曲率半径と主方向を表す角度を定めた。そして、一方の歯面を与え、他方の歯面の三つの要素を求めるために必要な三つの方程式を明らかにした。これらのことをまとめると、次のようになる。

- (1) x_1, x_2 両歯面の歯すじ方向の法曲率間には、式(44)が成立し、一方が与えられれば、他方の法曲率は求められる。
- (2) 法曲率がわかると、式(45)によって、歯面間の歯すじ方向の測地的ねじり率が求められる。
- (3) (1)、(2)により、両歯面の原点を通る接触線の方向と歯すじ方向のなす角度 σ が、式(32)によって求められる。

(4) σ をパラメータとして, 主方向の式(48)が与えられるので, 一方の歯面の主方向が与えられれば, 他方は決定する。

(5) 主方向が求められることにより, 両歯面の主曲率は式(49), (50)によって求められる。

(6) 限界圧力角, 限界法曲率は上記の計算式の特異点として誘導され, その内容が明らかにされた。

以上のように本論文は, (1)~(5)項の各式が, 線

接触かみあいの基本的な方程式であり, 歯車のかみあいに必要な, 歯面に関する三つの要素を求める必要条件式であることがわかった。

文 献

- (1) 高橋・伊藤・ほか3名, 機論, 55-514, C(1989), 1454.
- (2) 高橋・伊藤・ほか1名, 機論, 57-544, C(1991), 3934.
- (3) Wildhaber, E., *Am. Mach.*, 90(1946), 131.