

## ハイポイドギヤの端部歯当たりに関する研究\*

### (第1報, 理論解析)

伊藤 紀男<sup>\*1</sup>, 高橋 幸一<sup>\*2</sup>, 西尾 淳也<sup>\*3</sup>

## Toe and Heel Tooth Contact Analysis of Hypoid Gear (1st Report, Theory)

Norio ITO, Koichi TAKAHASHI and Junya NISHIO

The hypoid gear is an excellent gear and its quality is estimated from the tooth contact pattern. In general, when the load changes under operation, the relative positions of the pinion and gear also change slightly, and the tooth contact pattern moves from the central part of the tooth surface towards the toe or the heel. It is considered that this is caused by such factors as the deflection of the housing or bearing, and assembly error. However, in all such cases a good tooth contact pattern must be maintained to transmit revolution with an exact angular velocity ratio. Therefore we study the characteristics of the hypoid gear tooth contact pattern that are caused by movement to both sides of the tooth surface. In the present report, the theoretical analysis for obtaining an accurate tooth contact pattern is described.

**Key Words:** Gear, Hypoid Gear, Tooth Contact Analysis, Toe Bearing, Heel Bearing, Theoretical Analysis

### 1. 緒 言

ハイポイドギヤは、量産体制が高度にシステム化され、品質においても非常に優れた歯車である。しかし、その性能を遺憾なく発揮させるためには、いかなる使用条件下においても、優れた歯当りを維持させなければならない。

一般に、ハイポイドギヤは運転中に伝達トルクが変動すると、ピニオンとギヤの組立位置が相対的に微小変位し、歯面の接触点も変化する。それに伴って、歯当りの位置も当初の歯面中央部から外端部や内端部に移動する。このように歯面の接触点の変動した場合でも、正確な角速度比で回転を伝達させるためには、優れた歯当りが不可欠である。特に、自動車用ハイポイドギヤにおいては、常時歯面に荷重がかかり、急加速時や大荷重がかかった場合には、ギヤボックス内の歯車支持部がたわみを起こしたり、あるいは軸受部分が弾性変形をを起こしたりして、歯面の接触点に変化す

る。通常は荷重がかかると、歯当りは外端部に移動するが、組付けが悪いと内端部に移動することもある。このような場合における歯当り管理は、自動車の騒音対策上重要な課題となっている。このようにハイポイドギヤの歯当りの調整は、歯面中央部のみならず、歯当りが歯面の端部に移動した場合についても、十分にその良否を検討しておかなければならない。

ハイポイドギヤの歯当りの移動に関しては、これまで米国グリーンソン社のTCAに関連した報告<sup>(1)</sup>などに解説的に述べられているが、その理論の詳細については論じられていない。そこで本論文では、ハイポイドギヤの歯当りが歯面の端部に移動した場合について、理論的に解析し、その結果を踏まえて歯当りシミュレーションを行い、端部歯当りの変化の詳細について検討を加えたものである。本報では、まずその理論的な解析結果について報告する。

### 2. 歯当り移動

**2・1 組立装置のたわみと歯当り検査** 図1は、ピニオン、ギヤ両回転軸の共通垂線を縦軸とし、ギヤの回転軸に垂直な平面図である。荷重の変動によって、ピニオンが相対的に破線のように変位し、ピニオンの

\* 1994年12月15日 MPT'94シンポジウム伝動装置において講演、原稿受付 1995年6月21日。

<sup>\*1</sup> 正員、富山大学工学部 (〒930 富山市五福3190)。

<sup>\*2</sup> 正員、ハイポイド高橋技研 (〒230 横浜市鶴見区下末吉5-14-23)。

<sup>\*3</sup> 学生員、富山大学大学院。

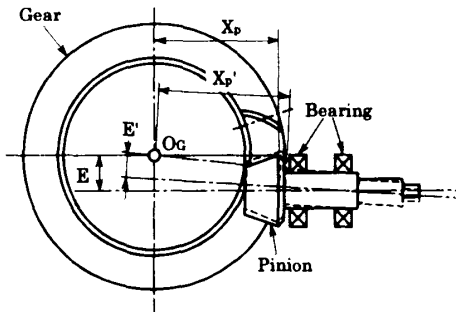
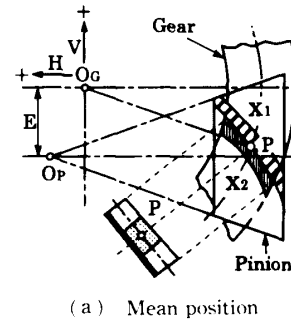


Fig. 1 Deflection under the load

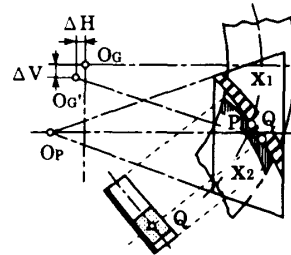
組立距離  $X_p$  とオフセット  $E$  が、それぞれ  $X_p'$ 、 $E'$  と変化した場合を示している。点  $O_G$  はギヤの中心である。一般に、このような変位に伴う歯当たり検査は、ハイポイドテストによって実施される。すなわち、テスト上でオフセット方向とピニオン軸方向にそれぞれ微小変位  $\Delta V$ 、 $\Delta H$  を与え、その変化の値に応じた歯当たりパターンを調べるものである。変化の方向は、オフセットが増大する方向を正として、 $\Delta V = E' - E$  と表し、ピニオン軸は軸が後退する方向を正として、 $\Delta H = X_p' - X_p$  と表される。

ハイポイドギヤのピニオン軸は、予圧を与えられたテーパローラベアリングなどによって支えられているため、 $\Delta V$  と  $\Delta H$  は伝達トルクの大きさに応じて、ほぼ比例関係をもっている<sup>(2)</sup>。したがって、 $\Delta V$  と  $\Delta H$  の数値ならびにそれらの間の比例定数は、歯面相互の接触関係を表すことになる。このような  $\Delta V$ 、 $\Delta H$  の関係を利用して、歯当たりの変化を詳細に調べる方法が VH 検査である<sup>(3)</sup>。

**2.2 内端部および外端部歯当たり** ハイポイドギヤの歯当たりは、ピニオンとギヤの歯すじ曲率半径を相対的に変化させ、ほぼ歯幅中央においてだ円形状となるように調整される。すなわち、ピニオン歯切り用のカット半径とギヤ用のカット半径に微小差を与えて、クラウニング歯当たりとなるように歯切りされる。そこで、ギヤの歯面を  $x_2$ 、ピニオンの歯面を  $x_1$  と表し、ピニオン歯面  $x_1$  と完全に線接触かみあいをなすギヤ歯面として  $x_{2a}$  を考える。これを仮想ギヤ歯面と呼ぶことにする。 $x_2$  なるギヤ歯面と  $x_{2a}$  なる仮想ギヤ歯面は歯車諸元は同一であるが、互いにクラウニング接触する関係にある。よって、両歯面が歯幅の中央部において接触していれば、正常なかみあいとなるが、接触点が端部に移動した場合にはそれぞれの歯車軸は、相対的にオフセット方向に  $\Delta V$ 、ピニオン軸方向に  $\Delta H$  だけ移動したことになり、歯当たりは端部歯当たりとなる。



(a) Mean position



(b) Heel position

Fig. 2 Localized tooth contact

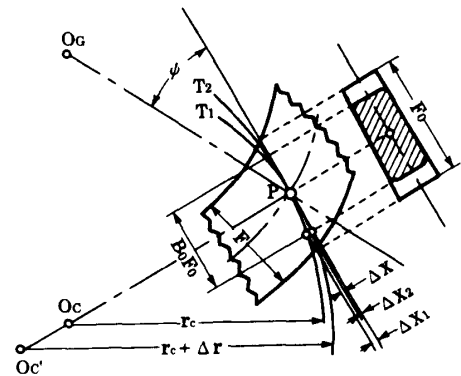
Fig. 3 Apparent contact range and critical clearance  $\Delta r$ 

図2は、上述の関係をピニオン歯面  $x_1$  とギヤ歯面  $x_2$  の間で考察したものである。図2(a)は通常の歯幅中央部のP点でのかみあいを示す。点  $O_P$  はピニオンのピッチ円すい頂点である。図2(b)は両歯面の関係位置が  $\Delta V$  と  $\Delta H$ 、すなわち、ギヤの中心  $O_G$  が  $O_G'$  へ変位し、歯当たりが外端部Q点に移動した場合である。2.1節で述べたように  $\Delta V$  と  $\Delta H$  の間には一定の関係があるが、もし  $\Delta V$  と  $\Delta H$  がそれぞれ独立して変動すれば、両歯面は歯底部において干渉することになる。すなわち、 $\Delta V$  と  $\Delta H$  は、 $x_1$  と  $x_2$  両歯面の接触状態に応じた関係をもつということである。図2(a)、(b)には歯面上の歯当たりパターンが模式的に示されている。次に、歯当たり長さや接触歯面間の曲率半径との関係について考察する。

図3は、ピッチ平面上において、考察点Pを通る2本の歯すじ  $T_1$ 、 $T_2$  を示したものである。ギヤの中心が

$O_c$  で、曲率半径が  $r_c$  の歯すじの中心を  $O_c$ 、曲率半径が  $r_c + \Delta r$  の中心を  $O_c'$  とする。ギヤの歯幅を  $F$ 、歯すじ方向の歯幅を  $F_0$ 、歯すじねじれ角を  $\psi$ 、歯当たり長さ係数を  $B_0$  とすれば、歯当たりの長さは、 $B_0 F / \cos \psi$  として与えられる。 $B_0$  の値は通常は  $1/2 \sim 1/3$  の範囲で選ばれる。二つの歯すじの歯当たり長さ周縁のすきまを  $\Delta x$ 、点  $P$  における歯すじの接線と各歯すじとの間のすきまを  $\Delta x_1, \Delta x_2$  として表せば、 $\Delta x = \Delta x_1 - \Delta x_2$  となり、次式が成立する。

$$\Delta x = \frac{\Delta r}{2r_c^2} \left( \frac{B_0 F}{2 \cos \psi} \right)^2 \dots\dots\dots (1)$$

ここで、歯当たり周縁を表すすきま  $\Delta x$  は、著者の一人の実測の結果やグリーンソンの結果などから  $0.005 \text{ mm}$  として実用化されている。そこで  $\Delta x = 0.005 \text{ mm}$  とし、 $\Delta r$  を  $\text{mm}$  単位で表すと、次式が得られる。

$$\Delta r = 0.005 \times 8 \left( \frac{r_c \cos \psi}{B_0 F} \right)^2 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、式(2)は所要の歯当たり長さ係数  $B_0$  を得るために必要な歯面の曲率半径差の式となる。

図4は、歯当たりの移動をギヤ歯面  $x_2$  と仮想ギヤ歯面  $x_{2a}$  について考察したものである。両歯面は最初考察点(ピッチ点)  $P$  において接触している。荷重がかかり、ハイポイドギヤの支持部の弾性変形などにより、接触点がそれぞれの歯面上の点  $Q, Q'$  に移動したとする。 $\widehat{PQ}$  と  $\widehat{PQ'}$  は厳密には異なるが、歯数の多いギヤ歯面では、精度上  $\widehat{PQ} = \widehat{PQ'} = s$  として取り扱うことができる。点  $P$  における両歯面上の歯すじの曲率中心を図3と同様に  $O_c, O_c'$  とし、それらの半径を  $r_c, r_c + \Delta r$  とする。点  $P$  でのねじれ角を  $\psi_2$ 、 $O_c \overline{P} = A_2$ 、 $O_c O_c' = S_0$ 、 $O_c \overline{O_c'} = S_a$ 、 $O_c Q = A$ 、 $O_c Q' = A'$  とする。また、点  $P$  でのねじれ角  $\psi_2$  に対して、点  $Q'$  および点  $Q$  でのねじれ角の変化量を  $\Delta \psi_2, \Delta \psi_{2a}$  とすれば、それ

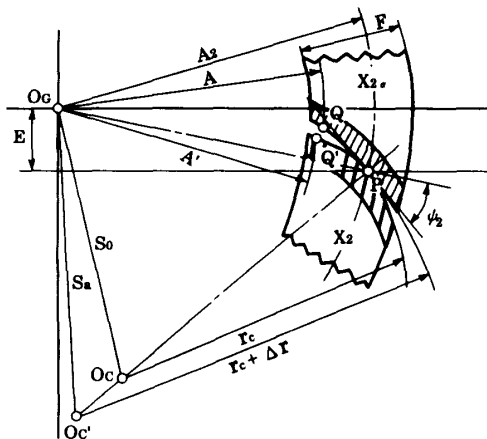


Fig. 4 Tooth contact point on the ends of the teeth

らは次の二式によって求められる。

$$\Delta \psi_2 = \frac{s \left( 1 - \frac{r_c}{A_2} \sin \psi_2 \right)}{r_c \cos \psi_2} \dots\dots\dots (3)$$

$$\Delta \psi_{2a} = \frac{s \left( 1 - \frac{r_c}{A_2} \sin \psi_2 - \frac{\Delta r}{r_c} \right)}{r_c \cos \psi_2} \dots\dots\dots (4)$$

図5は、図4の両歯面が点  $Q, Q'$  で接触した場合を示す。その点をあらためて点  $Q$  と表す。端部  $Q$  点における両歯面のねじれ角をそれぞれ  $\psi, \psi'$  と表し、 $O_c Q = A'$ 、ギヤの歯数を  $N$  とすると、まず、かみあい条件から、次の式が成り立つ。

$$\frac{2\pi}{N} A \cos \psi = \frac{2\pi}{N} A' \cos \psi' \dots\dots\dots (5)$$

両歯車の円すい距離に相当する  $A, A'$  の差を  $\delta A$ 、歯すじねじれ角の差を  $\delta \psi$  とすれば、 $Q$  点で両歯面がかみあうとき、次の関係が成立する。

$$\delta A = \delta \psi A \tan \psi \dots\dots\dots (6)$$

また、点  $Q$  における  $A, A'$  および  $\psi, \psi'$  は、次の各式で表される。

$$\left. \begin{aligned} A &= A_2 + s & \psi &= \psi_2 + \Delta \psi_2 \\ A' &= A_2 + s + \delta A & \psi' &= \psi_2 + \Delta \psi_{2a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

したがって、 $\delta A, \delta \psi$  と  $\Delta \psi_2, \Delta \psi_{2a}$  の間には、次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \delta \psi &= \Delta \psi_2 - \Delta \psi_{2a} \\ \delta A &= (\Delta \psi_2 - \Delta \psi_{2a})(A_2 + s) \tan(\psi_2 + \Delta \psi_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

図5で、ピニオンのピッチ角を  $\gamma$  とすれば、 $\Delta V, \Delta H$  に関し、次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta V &= -(A_2 + s) \delta \psi \cos \epsilon + \delta A \sin \epsilon \\ \Delta H &= \{ (A_2 + s) \delta \psi \sin \epsilon + \delta A \cos \epsilon \} \cos \gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\epsilon$  は、角度  $\epsilon' = \psi_1 - \psi_2$  のギヤ軸直角断面

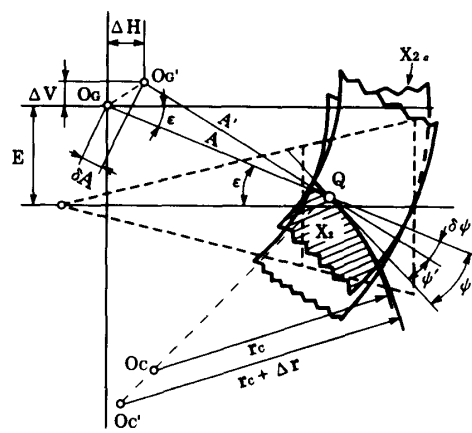


Fig. 5  $\Delta V, \Delta H$  for position change of tooth bearing

(machine plane)上への投影角である。ただし、 $\phi_1$  はピニオンのねじれ角である。これらの式より、駆動側では  $s$  が負、すなわち内端部の  $Q$  点に歯当たりが生ずる場合は、 $\delta\phi$  は負となり、式(6)から  $\delta A$  も負になる。よって、式(9)より、 $\Delta V$  は正、 $\Delta H$  は負となることがわかる。同様に、 $s$  が正の場合は、外端部当たりとなり、 $\Delta V$  は負、 $\Delta H$  は正となる。このことから、歯当たりの移動は歯のひずみではなく、組立装置の弾性変形によるたわみに関係していることがわかる。

以上によって、 $\Delta V, \Delta H$  の値は  $x_2$  と  $x_{2a}$  両歯面の歯すじ方向の曲率差によって求められるものであり、これら  $\Delta V, \Delta H$  の値によって歯当たりの形や特徴を検査することができるのである。実際に、ハイポイドギヤを製造する場合には、熱処理時に生じるひずみやラップ後、または耐久試験によって生じる変化の程度をこのような数値によって読み取ることができるが、歯当たりパターン自身の形状を変えることはできない。

ここで、端部  $Q$  点における歯当たりパターンの変化を詳細に調べるためには、歯面をより厳密な式で表す必要がある。そのためには歯面の式を無限級数によって展開し、その式の中で、歯当たりの変化に効果的な影響を与える歯面係数を明らかにしなければならない。そのような係数を用いて、歯面  $x_2$  および  $x_{2a}$  を表し、それらを接触させれば、精密な端部歯当たりパターンを求めることができる。

### 3. 歯面の表示法

歯面を曲面  $x$  と表して解析する場合、使用する座標系は、歯面上のピッチ点を原点  $P$  とし、その点を通る接平面を  $yz$  平面、それに垂直な法線方向に  $x$  軸をとる  $P-xyz$  直交座標系である。 $z$  軸は歯すじ方向を表すものとする。一方、歯面を微分幾何学的に考察する

場合、曲面  $x$  上の点  $P$  には一組の主方向とそれに対応する主曲率  $1/\rho', 1/\rho''$  が存在する。二つの主方向は  $yz$  平面上にあるので、その一方の主方向が  $z$  軸となす角を  $\delta$  とし、それら主方向を  $s', s''$  座標軸<sup>(4)(5)</sup> と定めると、歯面上には二つの座標系が得られる。

図6は、以上の関係を示したものである。図6には、歯面上の任意の点  $Q$  が円柱座標  $(x, r, \theta)$  によっても表されている。まず、歯面  $x$  は  $(x, s', s'')$  座標によって、次式で表される。

$$x = \begin{bmatrix} x \\ s' \\ s'' \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

いま、 $x = -f(s', s'')$  とすれば、 $f(s', s'')$  は、次の  $s', s''$  に関する無限級数によって展開することができる。

$$f(s', s'') = \frac{1}{2} \left( \frac{s'^2}{\rho'} + \frac{s''^2}{\rho''} \right) + \frac{1}{6} (Gs'^3 + 3Hs'^2s'' + 3Ls's''^2 + Ms''^3) + \frac{1}{24} (Ps'^4 + 4Qs'^3s'' + 6Ts'^2s''^2 + 4Us's''^3 + Vs''^4) + \dots \dots\dots (11)$$

ここに、 $G, H, L, M$  は3次の歯面係数であり、 $P, Q, T, U, V$  は4次の歯面係数である。なお、式(11)は原点の近傍で成り立つものとし、 $s', s''$  はともに主曲率半径  $\rho', \rho''$  に比べ、微小な範囲内にあるものとして扱う。

ここで、三次の歯面係数を明らかにするために、具体例として、ギヤの歯切りに用いられる円すい形フェースミルカッタが描く曲面について考える。カッタのブレード圧力角を  $\phi_B$  とすると、三次の歯面係数は次のように求められる<sup>(6)</sup>。

$$G=0, H=0, L = \frac{\tan \phi_B}{\rho'^2}, M=0 \dots\dots\dots (12)$$

なお、歯当たりに必要な歯面係数は、実用的には式(11)の中の三次までで十分なため、四次以上の歯面係数については考慮外として扱った<sup>(7)</sup>。式(10)、(11)を円柱座標系を用いて表すと、次のようになる。

$$x = \begin{bmatrix} -f(r, \theta) \\ -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $f(r, \theta)$  は、次の式で表される。

$$f(r, \theta) = \frac{r^2}{2} \left\{ \frac{\sin^2(\theta - \delta)}{\rho'} + \frac{\cos^2(\theta - \delta)}{\rho''} \right\} + \frac{r^3}{6} \{ -G \sin^3(\theta - \delta) + 3H \sin^2(\theta - \delta) \cos(\theta - \delta) - 3L \sin(\theta - \delta) \cos^2(\theta - \delta) \}$$

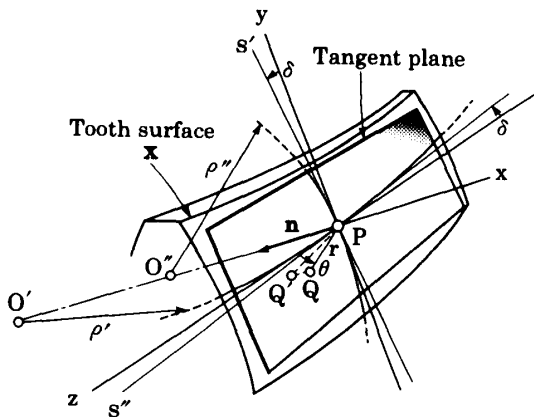


Fig. 6 Coordinate systems on the tooth tangent plane

$$+ M \cos^3(\theta - \delta) \dots\dots\dots (14)$$

本論文では、これら式(13), (14)を基本として考察を進める。

4. ピッチ点近傍の接触歯面

ハイポイドギヤによって動力が伝達されると、ピニオン、ギヤの相対位置はたわみなどによって変化し、歯当りは歯面中央から若干離れた位置Qに移動する。その場合、Q点におけるピニオン、ギヤ両歯面の形は、中央部とは明らかに異なるため、歯当りの形も変化することになる。

いま、歯面が式(13), (14)のごとく、2次および3次の歯面係数によって表された場合、Q点の近傍の曲面について微分幾何学的に考察する。点Qは歯面  $x$  上の点であるから、点Qにおける歯面の単位法線ベクトル  $n$  (図6参照)とすれば、次式のように求められる。

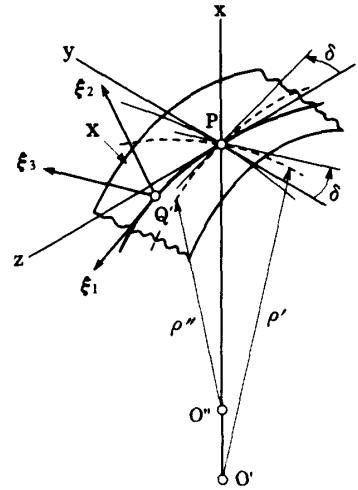


Fig. 7 Coordinate system at Q in the vicinity of the origin

$$n = \frac{\frac{\partial x}{\partial r} \times \frac{\partial x}{r \partial \theta}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r} \times \frac{\partial x}{r \partial \theta}\right)^2}} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \cos \theta \\ -\frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2}} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= r \left\{ \frac{\sin^2(\theta - \delta)}{\rho'} + \frac{\cos^2(\theta - \delta)}{\rho''} \right\} + \frac{r^2}{2} X_s(\theta) \\ X_s(\theta) &= -G \sin^3(\theta - \delta) + 3H \sin^2(\theta - \delta) \cos(\theta - \delta) - 3L \sin(\theta - \delta) \cos^2(\theta - \delta) + M \cos^3(\theta - \delta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= r \left( \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''} \right) \sin(\theta - \delta) \cos(\theta - \delta) - \frac{r^2}{2} Y_s(\theta) \\ Y_s(\theta) &= G \sin^2(\theta - \delta) \cos(\theta - \delta) + H \sin(\theta - \delta) \{1 - 3 \cos^2(\theta - \delta)\} \\ &\quad + L \cos(\theta - \delta) \{1 - 3 \sin^2(\theta - \delta)\} + M \sin(\theta - \delta) \cos^2(\theta - \delta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

である。

次に、原点Pを通り、かつ点Qを通る歯面上の測地線について考える。原点Pからの曲線の弧長を  $s$  として、曲線を  $x(s)$  で表す。点Qにおける測地線の単位接線ベクトルを  $dx/ds$  で表せば、次の式で表される。

$$\frac{dx}{ds} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ -\sin \theta - \frac{r}{r'} \cos \theta \\ \cos \theta - \frac{r}{r'} \sin \theta \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2}} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $r' = dr/d\theta$  である。点Qは原点近傍の点であるから、 $r \approx s$  として扱い、 $dr = ds$  とする。また、 $\theta = 0$  の場合は歯すじ方向を表すので、Q点を通る測地線は  $[x(r, \theta)]_{\theta=0}$  として与えられる。よって、Q点を通る歯すじの単位接線ベクトルを  $\xi_1$ 、単位主法線ベクトルを  $\xi_2$ 、単位従法線ベクトルを  $\xi_3$  として表せば、Q点における動標構  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  が得られる。

図7は、上記関係を示したものである。 $\rho', \rho''$  は原点における歯面  $x$  の主曲率半径であり、一方の主方向と歯すじ方向のなす角が  $\delta$  である。ここで  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  は、次のように求められる。

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -r \left\{ \frac{\sin^2(\theta-\delta)}{\rho'} + \frac{\cos^2(\theta-\delta)}{\rho''} \right\} - \frac{r^2}{2} [X_s]_{\theta=0} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta=0}^2}} \dots\dots\dots (19)$$

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -r \left( \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''} \right) \sin \delta \cos \delta - \frac{r^2}{2} [Y_s]_{\theta=0} \\ -r \left( \frac{\sin^2 \delta}{\rho'} + \frac{\cos^2 \delta}{\rho''} \right) - \frac{r^2}{2} [X_s]_{\theta=0} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta=0}^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\theta=0}^2}} \dots\dots\dots (20)$$

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} \\ -1 \\ \left( -\frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left\{ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta=0}^2 \right\} \left\{ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\theta=0}^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)_{\theta=0}^2 \right\}}} \dots\dots\dots (21)$$

次に点 Q における測地線の接線方向に関する法曲率を  $1/\rho$ , 測地的換率を  $1/\tau$  とすると, フレネ・セレーの公式より, 次式が得られる.

$$\frac{d\xi_2}{ds} = -\frac{\xi_1}{\rho} + \frac{\xi_3}{\tau} \dots\dots\dots (22)$$

これより,  $1/\rho, 1/\tau$  は, 次のように求めることができる.

$$\frac{1}{\rho} = \left( \frac{\sin^2 \delta}{\rho'} + \frac{\cos^2 \delta}{\rho''} \right) + r(G \sin^3 \delta + 3H \sin^2 \delta \cos \delta + 3L \sin \delta \cos^2 \delta + M \cos^3 \delta) \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{1}{\tau} = \left( \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''} \right) \sin \delta \cos \delta + r \{ G \sin^2 \delta \cos \delta - H \sin \delta (1 - 3 \cos^2 \delta) + L \cos \delta (1 - 3 \sin^2 \delta) - M \sin \delta \cos^2 \delta \} \dots\dots\dots (24)$$

原点 P における歯すじの法曲率や測地的換率は, 式 (23), (24) において,  $r=0$  とした場合に相当する. ここで,  $x_2$  ギヤ歯面と,  $x_1$  ピニオン歯面と線接触かみあいをなす  $x_{2a}$  仮想ギヤ歯面の原点における歯すじ方向の法曲率半径をそれぞれ  $\rho_2, \rho_{2a}$ , 測地的換率半径を  $\tau_2, \tau_{2a}$  と表し, それぞれの歯面の一組の主曲率半径を  $(\rho'_2, \rho''_2)$  および  $(\rho'_{2a}, \rho''_{2a})$  と表す. また, それら歯面の主方向と歯すじ方向とのなす角を  $\delta_2, \delta_{2a}$  と表せば, 原点 P および点 Q において, 次のような関係式が得られる.

まず, 原点 P における法曲率については, 次のように得られる.

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\sin^2 \delta_2}{\rho'_2} + \frac{\cos^2 \delta_2}{\rho''_2} \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{1}{\rho_{2a}} = \frac{\sin^2 \delta_{2a}}{\rho'_{2a}} + \frac{\cos^2 \delta_{2a}}{\rho''_{2a}} \dots\dots\dots (26)$$

また, 点 Q における法曲率については, 歯すじに沿った原点 P からの長さは  $s$  であるから, 点 Q における値を  $( )_Q$  として表示すれば, 次のように求められる.

$$\left( \frac{1}{\rho_2} \right)_Q = \frac{1}{\rho_2} + s \{ G_2 \sin^3 \delta_2 + 3H_2 \sin^2 \delta_2 \cos \delta_2 + 3L_2 \sin \delta_2 \cos^2 \delta_2 + M_2 \cos^3 \delta_2 \} \dots\dots\dots (27)$$

$$\left( \frac{1}{\rho_{2a}} \right)_Q = \frac{1}{\rho_{2a}} + s \{ G_{2a} \sin^3 \delta_{2a} + 3H_{2a} \sin^2 \delta_{2a} \cos \delta_{2a} + 3L_{2a} \sin \delta_{2a} \cos^2 \delta_{2a} + M_{2a} \cos^3 \delta_{2a} \} \dots\dots\dots (28)$$

さらに, 原点 P における測地的換率については, 次のように求められる.

$$\frac{1}{\tau_2} = \left( \frac{1}{\rho'_2} - \frac{1}{\rho''_2} \right) \sin \delta_2 \cos \delta_2 \dots\dots\dots (29)$$

$$\frac{1}{\tau_{2a}} = \left( \frac{1}{\rho'_{2a}} - \frac{1}{\rho''_{2a}} \right) \sin \delta_{2a} \cos \delta_{2a} \dots\dots\dots (30)$$

同様に, 点 Q の測地的換率についても, 次のように求められる.

$$\left( \frac{1}{\tau_2} \right)_Q = \frac{1}{\tau_2} + s \{ G_2 \sin^2 \delta_2 \cos \delta_2 - H_2 \sin \delta_2 (1 - 3 \cos^2 \delta_2) + L_2 \cos \delta_2 (1 - 3 \sin^2 \delta_2) - M_2 \sin \delta_2 \cos^2 \delta_2 \} \dots\dots\dots (31)$$

$$\left( \frac{1}{\tau_{2a}} \right)_Q = \frac{1}{\tau_{2a}} + s \{ G_{2a} \sin^2 \delta_{2a} \cos \delta_{2a} - H_{2a} \sin \delta_{2a} (1 - 3 \cos^2 \delta_{2a}) + L_{2a} \cos \delta_{2a} (1 - 3 \sin^2 \delta_{2a}) - M_{2a} \sin \delta_{2a} \cos^2 \delta_{2a} \} \dots\dots\dots (32)$$

以上の各式によって, 原点 P からの長さ  $s$  のところにある点 Q における二つの歯面の法曲率および測地的換率が求められることになる. これらの値を用いて, 二つの歯面  $x_2$  および  $x_{2a}$  を接触させれば, 歯面上の端部 Q 点における歯当たりパターンは精密に求められることになる.

## 5. 結 論

ハイポイドギヤの歯当りは、一般にギヤ歯幅の中央部に位置するように歯切りされ、熱処理が施され、ラップされる。組付けられたハイポイドギヤが動力伝達のために駆動トルクがかかると、歯当りは歯幅の外端部へと移動し、中央部とは異なる新しい歯当たりパターンを生じる。この現象は歯自身のひずみから生じるものと考えられがちであるが、組立装置自身の弾性たわみに由来するものであることを明らかにした。そして端部での詳細な歯当たりパターンを求めるために必要な理論的な解析を行い、次のような結論を得た。

(1) ハイポイドギヤの組立装置のたわみなどによる歯当たりの移動は、オフセット方向の微小変位  $\Delta V$  とピニオンの組立距離の微小変位  $\Delta H$ 、およびクラウニングに関するカット半径差  $\Delta r$  によって求め得る。

(2) 端部歯当りを計算機によってシミュレーシ

ョンするために、歯面を無限級数に展開し、実用上四次以上の歯面係数を省略した展開式を用いて、歯面端部における歯すじ方向の法曲率や測地的振率などを明らかにし、等隙線による歯当たりパターン画法を求めた。

以上によって、歯面中央部における歯当たりパターン<sup>(8)</sup>と同様に、端部における歯当たりパターンを求めることが可能となった。

## 文 献

- (1) 例えば, *Understanding Tooth Contact Analysis*, (1970), Gleason Works.
- (2) 高橋幸一・伊藤紀男, 機論, **51** 464, C (1985), 813-822.
- (3) 例えば, *How To Test Bevel Gears*, (1955), Gleason Works.
- (4) Baxter, M. L., Jr, *ASME Paper*, 61 MD 20 (1961).
- (5) Spear, G. M. and Baxter, M. L. Jr., *ASME Paper*, 66 MECH 17 (1966).
- (6) 高橋幸一・伊藤紀男, 機論, **50** 456, C (1984), 1439-1448.
- (7) 高橋幸一・伊藤紀男, 機論, **50** 456, C (1984), 1449-1456.
- (8) 高橋幸一・伊藤紀男・呉為民・小野寺学, 機論, **56** 528, C (1990), 2203-2209.