Nucleolus のある一般化について

中　山　幹　夫

1. はじめに

Nucleolus は，サイド・ペイメントを許す n 人協力ゲームの解のひとつで，Schmeidler〔1969〕によって導入された。この解の顕著な性質は一意に存在すること，および空でないコアに含まれることである。さらに，交渉集合や Kernel などの異なる観点から構成されている解にも含まれ，理論上興味深い性質をもっている。また，その定義が，最大不満の最小化と解釈できる形で与えられていることと，線型計画による計算が可能であることから実際問題への応用も多くなされている解の概念である。

他方，コアや Shapley value にくらべて，純粋交換市場の分析にはほとんど用いられていない。さらに，そのための前提のひとつとも云える，サイド・ペイメントを許さない n 人協力ゲームでの Nucleolus の定義も与えられていない。もっとも，純粋交換市場の分析に用いるためには，現状では個人間の効用比較を伴なわずに Nucleolus を定義することが要請され，これが困難のひとつとなっていると云える。しかし，サイド・ペイメントを許さないケースへの拡張は，他の多くの解の概念についてもなされていることであり，Nucleolus に対してもその拡張を施しておくべきであろう。本稿の目的はそのひとつの方法を与えることである。

ここで示す方法は，各プレイヤーに，最終利得の分配における取り分を表わすウェイトをあらかじめ与えておき，このウェイトに従って各提携がメンバーに利得を分配するという問題を考察することから出発する。次いて，こうして

決まる各メンバーの利得の提携内の**単純和**と，同じウェイトのもとで全体で行動した場合の各プレイヤーの利得の，その提携内での**単純和**との差を考える。ここで，サイド・ペイメントは仮定されていないので，提携内の利得の和を**最大化**することは意味をもたないことに注意する。こうして決まるその**差額**を，その提携の，そのウェイトのもとでの不満を表わす量と考え，通常の Nucleolus の定義をここに適用する。つまり，最大不満を最小化するような各プレイヤーのウェイトを探すわけである。この方法により，少なくとも，存在と空でないコアに含まれるという性質が保証される。

2. サイド・ペイメントを許さないゲーム

プレイヤーの集合を $N=\{1,2...,n\}$ とする。Nの空でない部分集合Sを**提携**（coalition）とよぶ。各提携Sに対し，R^s を $|s|$ 次元ユークリッド空間とする。ここで $|s|$ はSの人数である。また，座標はS内の各プレイヤーに対応しているとする。

以下でいうゲームは，次の4条件をみたす集合 V_s の族 $G=\{V_s\}_{SCN}$ のことである。

(i) 各提携Sに対し，V_s は R^s の空でない閉集合である。

(ii) $x\in V_s$ かつ，y が $y\in R^s$ および $y\leqq x(i,e.,y_i\leqq x_i$ *for each* $i\in S)$ をみたすならば $y\in V_s$ である。

(iii) 各提携Sに対し，$V_s-\bigcup_{i\varepsilon S}〔int(V_{\{i\}})\times R^{S-\{i\}}〕$ は空でなくかつ有界である。

(iV) 各プレイヤー i に対して，$supV_{\{i\}}>0$.

集合 V_s は，提携SがSだけで各メンバーに保証することのできる利得ベクトル $u_s=\{u_i\}_{i\varepsilon S}$ の全体を表わしている。条件(i)は技術上の条件であり，(ii)は経済学でいう無償処分の仮定で，通常 comprehensiveness とよばれている。(iii)は，各提携に対し，その提携の各メンバーが単独で獲得できる利得以上の値を保証する利得ベクトルが存在することを述べている。(iV)は，本質的でない複雑

さを避けるためのもので，これによって一般性が損なわれることはない。

3.　提携によるベクトル最大化

サイド・ペイメントが許される場合は，どの提携も得られた成果のもつ利得を各メンバーに任意のし方で分配することが可能で，このことが提携の生み出す利得を実数値で表現することを可能にしている。言いかえれば，提携内の利得の和の最大化行動が意味あるものとなる。ところが，サイド・ペイメントが許されない場合は，利得の和の最大化はそのままでは意味をもたず(1)，むしろベクトル最大化行動を考えなければならない。

ここでは，以下のような最大化問題を考える。まず，Aを（$n-1$）次元基本単体，A° をその内点の全体とする。$A=\{a\in R^N: \sum_{i\in N} a_i=1,\ a_i\geqq 0\ for\ all\ i\in N\}$，$A^\circ=\{a\in A: a_i>0 for\ all\ i\in N\}$．プレイヤー間で利得（効用）の比較は可能で共通の尺度で測られているとする。この仮定のもとで，$a\in A^\circ$ を各プレイヤーが獲得すべき利得の割合を示す比率であると考える。

比率 $a\in A^\circ$ を任意に特定化したとき，各提携Sは次の最大化問題$P(a,S)$を解くものとしよう。

$P(a,S)$:

$$maximize\ h$$

$$subject\ to\ u_i\geqq ha_i\ for\ all\ i\in S,\ and\ u_s=\{u_i\}_{i\in S}\in V_S$$

$P(a,S)$ は，各メンバー $i\in S$ のウェイト a_i に比例するような最大ベクトルを V_s の中で探すという問題である。最適解が存在するとき，h の最大値を $h(a,S)$ と書く。最終利得ベクトルは V_N の中から選ばれることになるが，それは，比率 $a\in A^\circ$ のもとで $P(a,N)$ を解くことに対応する。このとき，プレイヤー i の利得は $h(a,N)a_i$ と与えられる。この意味で，$a\in A^\circ$ を**分配率**とよんでおく。この分配率と最大化問題 $P(a,S)$ を媒介として，Nucleolus の拡張を考え

(1)　ただし，パレート・フロンティアの点は効用の代替に関する情報を含んでいる。このことについて，Shapley［1969］参照。

るわけである。

4. Nucleolus 分配率

分配率 $a \in A^{\circ}$ のもとで，各提携 S は $P(a,S)$ によって最大利得ベクトル u_s を実現できたとしよう。ここで，$u_i = h(a,S)a_i$, $i \in S$ である。また，同じ分配率 a のもとで提携 N は，各プレイヤーに対し $h(a,N)a_i$ を与えることができる。したがって，プレイヤー i は a のもとで $[h(a,S)-h(a,N)]a_i$ の利得の落差をもつことになるであろう。この差額の提携 S 内における単純和は，さらに，提携 S の，利得ベクトル $[h(a,N)a_1 \ldots, h(a,N)a_n]$ に対する不満を表現していると考えることができる。

こうして，以下のような不満の定義に到達する。まず，

$$A^* = \{a \in A : h(a,N)a_i \geqq sup \ \ V_{\{i\}} \ \ for \ all \ \ i \in N\}$$

とする。A^* は，個人合理的な利得ベクトルを保証する分配率の全体である。$a \in A^*$ が与えられたとき，次の量 $e(a,S)$ を提携 S の**不満**（complaints）とよぶ。

$$e(a,S) = \sum_{i \in S} (h(a,S) - h(a,N))a_i$$

ただし S＝空集合に対しては $e(a, S) = 0$ とする。

さて，残された手続きは，この不満について通常の Nucleolus の定義を適用することのみである。

任意の $a \in A^*$ に対し，$\theta(a)$ を次のような 2^n 次元ベクトルとする。

$$\theta(a) = (\theta_1(a), \ldots, \theta_{2^n}(a))$$

ただし，

$$\theta_j(a) \geqq \theta_k(a) \ \ if \ \ j < k,$$

$$\theta_k(a) = e(a, S_k), \ S_k \subset N \quad (k = 1, 2, \ldots, 2^n)$$

もし，ある $a \in A^*$ に対し $\theta(a)$ が辞書式順序で最小化されているならば，$a \in A^*$ を **Nucleolus 分配率**とよび，利得ベクトル $(h(a,N)a_1, \ldots, h(a,N)a_n)$ を Nucleolus とよぶことにしよう。これで拡張の手続きはひとまず完了する。

5. 証　　明

Schmeidler〔1969〕が導びいたNucleolusの性質のうち，存在と空でないコアに含まれるという性質はここでも成立する。これを証明しよう。

補題1　各提携Sについて，$P(a,S)$ は最適解をもつ。

証明　$a \in A^\circ$ に対して，区間 $\{h \geqq 0$: ある $u \in V_s$ をとれば，任意の $i \in S$ について，$u_i \geqq ha_i\}$ は，条件(i)，(iii)および(iv)から，コンパクトで空でないことに注意すればよい。（証明終）

補題2　各提携Sについて，$h(\cdot,S)$ は A° 上の連続関数である。

証明　関数 $f_s(u,a)=\min_{i \in S} \{u_i/a_i\}$ は $V_s \times A^\circ$ 上で連続なることは明らか。

次に，$\{a^t\}_{t=1,2,...}$ を $a^t \to a^\circ \in A^\circ$ なる A° 内の列とする。$\{u^t\}_{t=1,2,...}$ を V_s 内の列で，

$$h(a^t,S)=\max_{u_s \in V_s} f_s(u_s,a^t)=f_s(u^t,a^t) \tag{1}$$

によって定義されるものとする。補題1より，このことは可能である。すると，

$$f_s(u^t,a^t) \geqq f(u,a^t) \text{ for all } u \in V_s, (t=1, 2, \ldots) \tag{2}$$

(iii)と(iv)より，$u^t \geqq 0 (t=1, 2, \ldots)$ であり，したがって(i)より $\{u^t\}$ は有界点列である。u° を，その任意の集積点としよう。すると，f_s の連続性から，(2)において $u \in V_s$ を任意に固定すれば

$$f_s(u^\circ,a^\circ) \geqq f_s(u,a^\circ).$$

u° は任意の集積点であるから，これで(1)により，

$$\begin{aligned} h(a^\circ,S) &= f_s(u^\circ,a^\circ) \\ &= \lim_{t \to \infty} f_s(u^t,a^t) = \lim_{t \to \infty} h(a^t,S) \end{aligned}$$

が言えた。　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

定理1　少なくともひとつの Nucleolus 分配率が存在する。

証明　まず A^* はコンパクトで空でない。これは，条件(iii)と(iv)，および $h(\cdot,N)$ の A° での連続性と，A^* がAの部分集合であることから言える。

$A^* \subset A^\circ$ だから，$h(\cdot, S)$ は A^* でも連続である。ゆえに，各提携Sについ

て，$e(\cdot, S)$ は A^* で連続である。

あとは Schmeidler〔1969〕と同じようにすればよいが，便宜上，ここに述べておく。

まず，$k=1, 2, \ldots, 2^n$ に対して

$$\theta_k(a)=max\{min\{e(a, S):S\in F\}:F\subset 2^N, |F|=k\}$$

と書きかえられることに注意する。$\theta_k(\cdot)$ は有限個の連続関数の max, min で与えられているから，A^* で連続となる。

次に，

$$A_1=\{a\in A^*:\theta_1(a)\leqq\theta_1(\bar{a}),\ for\ all\ \bar{a}\in A^*\}$$

$$A_k=\{a\in A_{k-1}:\theta_k(a)\leqq\theta_k(\bar{a}),\ for\ all\ \bar{a}\in A_{k-1}\}$$

$$(k=2, \ldots, 2^n)$$

とおく。A_{2^n} が空でないことを言えばよい。$\theta_1(\cdot)$ は A^* で連続で A^* はコンパクトだから A_1 はコンパクトで空でない。同様に $\theta_2(\cdot)$ は A_1 で連続で A_1 はコンパクトだから A_2 もコンパクトで空でない。以下同様である。（証明終）

次に，コアとの関係を述べる。ゲームGのコアは次のように定義される利得ベクトルの全体である。

$u\in V_N$ がGのコアに属する
$\leftrightarrow$
どの提携Sも $\bar{u}_s>u_s$ なる利得ベクトル $\bar{u}_s\in V_s$ をもたない

補題 3　Gのコアが空でないための必要十分条件は，$h(a, N)=max\{h(a, S):S\subset N\}$ を満たす $a\in A^\circ$ が存在することである。

証明　（十分性）. $a\in A^\circ$ がその条件を満たすとする。利得ベクトル $u\in V_N$ は，$u_i=h(a, N)a_i$ $(for\ each\ i\in N)$ で与えられるとする。ある提携Sが，$\bar{u}_i>h(a,N)a_i$ $(for\ all\ i\in S)$ を満たす $\bar{u}\in V_s$ をもっていたとする。すると，$a\in A^\circ$ によって $h(a,S)>h(a,N)$ となるが，これは仮定に反する。よって，uはコアに属する。（必要性）. $u\in V_N$ がコアに属するとしよう。すると，(iv)により $u_i>0$ $(for\ all\ i\in N)$ である。$a\in A^\circ$ を次のように与える。

$$a_i=u_i/\sum_{i\in N}u_i\quad (for\ each\ i\in N).$$

提携Sに対して，$h(a,S)>k(a,N)$ だったとしよう。$a\in A^{\circ}$ だから，

$$h(a,S)a_i>h(a,N)a_i\geqq(\sum_{j\in N}u_j)a_i=u_i \quad (for\ all\ i\in S).$$

しかしこれはuがコアに属することに矛盾する。（証明終）

定理2　Gのコアが空でなければ，それは Nucleolus を含む。

証明　補題3より，ある $a\in A^{\circ}$ をとれば $h(a,S)\leqq h(a,N)$ $for\ all\ S\subset N$ となる。書きかえれば，$e(a,\ S)\leqq 0$ $for\ all\ S\subset N.$ ゆえに，$a^*\in A^*$ を任意の Nucleolus 分配率とすると定義から $\theta_1(a^*)\leqq\theta_1(a)\leqq 0.$ したがって，$e(a^*,\ S)\leqq 0$ $for\ all\ S\subset N.$ ゆえに，再び補題3から，Nucleolus はコアに属する。
（証明終）

6. おわりに

本稿で与えた Nucleolus の定義は，実際，サイド・ペイメントを許すケースを特別な場合として含んでいる。いま，V_s を

$$V_s=\{u_s\in R^s:\sum_{i\in S}u_i\leqq v(S),\ v(S)>0\}$$

と与えよう。すると，各提携に対し，

$$v(S)=h(a,S)\cdot\sum_{i\in S}a_i$$

$$e(a,S)=v(s)-v(N)\cdot\sum_{i\in N}a_i=v(S)-v(N)$$

となって，通常の不満の定義に帰着する。

Nucleolus のもうひとつの特徴である一意性は，しかし，この拡張によっては保存されないようである。たとえば，$e(\cdot,S)$ が各提携について，A° 上の凸関数となるならば一意性が得られることがわかる。しかし，どのような V_S がこの凸性を一般的に保証するかは，本稿では明らかにし得なかった。この点に関しては稿を改めて考察したい。

参考文献

Schmeidler, D.: The Nucleolus of a Characteristic Function Game. SIAM Journal of Applied Mathematics 17, 1969, 1163—1170.

Shapley, L. S.: Utility Comparison and the Theory of Games. La Decision, Ed. by G. Th. Guilbaud. Editions du CNRS, Paris,1969.