課税と所得再分配

——ゲーム理論的分析——

中山幹夫

はじめに

高額所得者から低所得者への所得移転が必要であると考えられるのは，言うまでもなくそれによって社会的厚生が増大する可能性があるからである（たとえば，所得の限界効用の逓減等によって）。しかし，社会の各人が純粋に彼の貨幣所得のみから効用を得ていると仮定すると，上記の移転は自発的には生じないであろう。つまり，その移転は課税によって強制的になされなければならない。この場合，高所得者はそれによって何も得ることができないにもかかわらず支払いを行なうわけである。また，低所得者はそれに対して何の貢献もなすことなく支払いを受ける。そして，このような再分配が正当化されるとすれば，それは社会的厚生の増大という，各個人には（仮定から）直接の関わりをもたない名目によってのみである。しかし，このような再分配の決定の仕方は，論理的一貫性をもっていると言えるだろうか。全体的厚生の増大は個人的厚生の部分的低下をひきおこしているのである。すなわち，社会の各人が彼の貨幣所得のみから効用を得ていると仮定する限り，社会的厚生というものをどのように考えるとしてもその最大化を根拠として所得移転を正当化することは自己矛盾を含んでいると言うべきである。

社会的厚生とは無関係に再分配を考えるとするならば，一つの考え方は各人の効用関数の形に所得移転の生ずる根拠を求めることである。Hochman と Rodgers〔2〕は，所得から得る効用は他人の所得水準とは無関係ではないと

考えた。すなわち，高所得者はある範囲内では低所得者に所得を移転することにより満足を得るという仮定である。(1)

このように考えるならば，高所得者は自分の効用を最大化するために低所得者への移転を行なうことになり，高所得者の効用が低下しはじめるところまで移転が行なわれるだろう。つまり，パレート最適な所得再分配は自発的な移転を通じて達成される。ここにおいては，社会的厚生の最大化は移転の結果として達成されるのであり，移転を理由づけるものではない。

Thurow〔8〕は，より一般的に，一つの所得分配の状態は各人に対して公共財として作用すると考えた。所得分配の極端な不平等は，社会的安定の欠如，犯罪等によって各人の welfare に影響を与えると考えることができる。すると，各人は自分自身の所得にのみ関心をもつことはできず，不平等の緩和ということに対しても私的な関心をもつことになるだろう。つまり，所得分配の不平等は各人の効用関数に共通にあらわれる変数となる。したがって，ここにおいても最適な所得分配は各人の自発性を根拠として達成される可能性をみることができる。ただ，この Thurow の分析はいくつかの点で一般性と説得力を欠いている。所得分配を公共財とみる考え方は認めたとしても，それを不平等の一次元的尺度として表現するのは，尺度の選択の問題を別にしても確かに余計なことである。何故なら，Hochman, Rodgers および Tullock〔3〕が指摘するように，Thurow の考え方そのものは，Hochman と Rodgers〔2〕の表現で十分だからである。この点については後で触れることにする。

いずれにせよ，Hochman と Rodgers〔2〕および，Thurow〔8〕の考え方は，所得移転の根拠を何らかの個人的自発性におくと言う点で一致している。われわれの目的の一つは，このような効用関数の相互依存性を仮定しなくても，ある条件のもとでは所得の移転が高所得者の側からの自発性にもとづいて行なわれるという可能性を論ずることである。そのためにわれわれは，かな

---

(1) 正確には，これは仮定ではなく，むしろ彼等の相互依存性の仮定からの一つの帰結である。

らずしも再分配を意図しない課税ルールを考える。このルールのもとでは高所得者は一定の比率で課税されるが低所得者は課税されない。また，個人間の私的な移転について課税当局は一切関知しない。このような条件のもとでは，高所得者は所得の一部を名目的に移転することに同意する低所得者を見つけることができれば，彼はその額に対する課税を回避することができる。しかし，その低所得者は何らかの実質的支払いがなされない限りその取り決めを拒否するかも知れない。こうして，税を回避しようとする高所得者とその取り決めに対して支払いを求める低所得者の間には一定の取り引きが成立することになる。われわれはこのような状況をゲームのモデルに定式化し，高所得者は税の回避のためには低所得者に対して，いくらかの実質的支払いを行なわなければならないことを示す。つまり，このような再分配がコアに属することを示す。ここにおいては，所得再分配は税の回避という私的・利己的動機によって達成されるのであって，Hochman と Rodgers〔2〕のモデルでは，一見，利他主義的な行動によって達成されるのと良い対照をなしている。

われわれの目的のもうひとつのものは，所得分配それ自体を公共財とみなすThurow〔8〕の考え方を，逆説的であるが，Thurow 自身より忠実に定式化することによって再分配を考えることである。Thurow の考え方は，結局のところ，各個人は自己の所得のみでなく所得分配の状態に対しても個々の価値判断をもっているということである。このことは，各人の効用関数の中に所得分配の状態をあらわすベクトルを変数として取り入れることによって表現できる。つまり，各人がどれだけの所得をもつかということが共通の関心となることを表現すればよい。このように考えることによって，Hochman と Rodgers〔2〕の効用の相互依存性をも部分的に包含することが可能になる。このモデルにおいては，われわれは積極的な再分配の意図をもつ課税ルールを想定する。つまり，再分配のための財源を各人の初期保有額に対する一定率の課税に求める。各人は手もとに残った所得と自分への分配額を含む社会全体の再分配ベクトルに対して効用をもつ。こうして，パレート最適な再分配を比例所得税

のもとで考えることができる。

Thurow〔8〕は，最適な分配を決定するにあたって，公共財の自発的交渉のモデルを適用しているが，われわれがこれを用いない理由は，固定した課税ルールのもとでは free rider の問題を回避できることに加えて，Nakayama〔5〕によって示されたように，比例所得税のもとで達成されるパレート・最適な配分は，そしてこれのみが，公共財経済の適当に修正されたコアに属するという利点をもつからである。つまり，このような再分配のみが，社会のそのようなグループの動機と実行力とに照らしてこれ以上改善することのできないものとして残るということを示すことができる。したがって，この場合においても，パレート最適な再分配は達成すべき目標として与えられるのではなく，ある一定のルールのもとにおける自発的行動の結果として達成される。

以下，モデルⅠでは効用関数が他人の所得とは無関係な場合について，モデルⅡでは再分配を公共財として各人の効用関数の中に取り入れて考える場合について分析する。なおモデルⅠの内容は，Nakayama〔4〕の表現を若干一般化して述べたものである。

1. モ デ ル Ⅰ

ここでは，社会の各主体がもっぱら彼自身の貨幣所得のみから効用を得ていると仮定し，このような場合においても高所得者から低所得者への移転が何らかの自発性にもとづいて行なわれるという，ひとつの可能性を考察する。

いま，社会は n 人の主体 $1, 2, \cdots, n$ から成り，これを $N=\{1, \cdots, n\}$ と書く。各主体 i は m_i であらわされる貨幣所得をもっている。この社会では，次のようなルールのもとで課税が行なわれている：主体 i に対する課税額は

$$\begin{array}{lll} t(m_i-a) & if & m_i \geqq a, \\ 0 & if & m_i < a. \end{array} \qquad (1)$$

ここに t (>0) は税率をあらわし，a は課税最低限をあらわす。課税最低限 a は，社会の平均所得を超えないと仮定しよう。つまり，

$$\sum_{i \in N} m_i - n \cdot a \geqq 0.$$

この a を境としてNは次のように分割して考えることができる。

$$A = \{i \in N : m_i \geqq a\}$$

$$B = \{i \in N : m_i < a\}$$

便宜上，A, B のメンバーをそれぞれ高所得者，低所得者とよぶことにする。

さて，この課税は再分配を意味しない一般行政費用としての支出のためのものであると仮定し，したがって各主体はそれによる便益を直接，税負担と関連づけてはいないものとしよう。このとき課税後の主体 i の所得を x_i とすると，

$$x_i = m_i - t(m_i - a) \qquad i \in A$$

$$x_i = m_i \qquad i \in B$$

であり，高所得者はたんに所得が減少するのみである。このままでは，何の所得移転も生じないであろう。ここで，課税当局は各主体の所得 m_i については完全に把握しているが，私的な移転については一切関知しないと仮定しよう。このとき，高所得者 i は次のようにして部分的に課税を回避することができるだろう。すなわちある低所得者 j に対して，j へ所得の一部を移転したことにするという取り決めを結ぶのである。むろん，j はこの i の申し出を拒否し得る。したがって，このような名目的な移転に対する取り決めが成立するためには，i から j へ実際にいくらかの支払いがなされなければならないだろう。このようにしてたとえば j へ $d = a - m_j > 0$ の額の名目的移転がなされたとしよう。このとき，j の増加した所得は a を超えない $(m_j + d = a)$ から課税額は 0，また，i に対する課税額は

$$t \cdot max(0, m_i - d - a) = t. max(0, m_i + m_j - 2a)$$

となる。この取り決めを結ばない場合の i に対する課税額は，$t(m_i - a)$ であり，$m_j - a < 0$ であることに注意すれば，

$$t(m_i - a) > t \cdot max(0, m_i + m_j - 2a)$$

となる。i は，この取り決めによってこの差額で示される額を利得として得ることができる。むろん，この利得のうち，いくらかは同意を得るための j への

実質的支払いとなるだろう。つまり，以上のような取り決めによって，i と j は課税後に残る実質的な所得 x_i，x_j を，

$$x_i+x_j=m_i+m_j-t\cdot max(0, m_i+m_j-2a)$$
$$x_i \geqq m_i-t(m_i-a)$$
$$x_j \geqq m_j$$

を満たす範囲で決定することになる。実際にどの値に決まるかは両者の交渉力に依存する。

このようにして高所得者の，税を回避したいという行動が低所得者への実質的な所得移転に導びくという可能性をみることができる。この予備的考察にもとづいて，次に，より一般的に上に述べた行動がどんな再分配に導びくかについて考察しよう。各主体 $i \in N$ は，自己の所得 x_i に対して定義された効用関数 $u_i(x_i)$ をもつ。

仮定Ⅰ． $u_i(x_i)$ は強い意味で単調増加。

$$X=\{x=(x_1, \cdots, x_n) : x_i \geqq 0 \ for \ all \ i \in N$$
$$\sum_{i \in N} x_i \leqq \sum_{i \in N} m_i - t(\sum_{i \in N} m_i - na)\}$$

と定義し，$x \in X$ であるとき，x を実行可能な再分配とよぶ。

いま，$x=(x_1, \cdots, x_n) \in X$ なる再分配 x に対し，N のある空でない部分集合 S について次の条件 (Ia)，(Ib) を満たす再分配 $=(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \in X$ があるとき，x は改善される，と言う。

(Ia)　$u_i(\bar{x}_i) > u_i(x_i) \quad for \ all \ i \in S$

(Ib)　$\sum_{i \in S} \bar{x}_i \leqq \sum_{i \in S} m_i - t\cdot max(0, \sum_{i \in S} m_i - |S|a)$

（ここに $|S|$ は S の人数）

条件 (Ia) は，S 内のすべての主体は再分配 x よりも $\bar{x}$ の方を選好することを意味している。条件 (Ib) の右辺は，S 内のすべての高所得者と低所得者が前に述べた名目的所得移転についての取り決めを行った場合に，課税ルール(1)のもとで S 内の各主体が確保することのできる所得の合計の最大値であ

る。[2] したがって条件（Ib）は，再分配 x が S に関する限りは実現可能であることを意味する。つまり，このとき S は，$\bar{x}$ を主張し得る十分な根拠をもつわけである。

さて，われわれの関心は，これ以上改善されない再分配とはどのようなものか，という点にある。そこで，改善されない再分配 x の全体をコアとよぶ。いま，次のような再分配 $x^*=(x_1^* \cdots, x_n^*)$ を考えよう。

$$x_i^*=m_i-t(m_i-a) \quad (i\in N) \qquad \cdots\cdots(2)$$

この再分配 x^* は，高所得者については課税ルール(1)のもとで課税された後の所得をあらわすにすぎないが，低所得者については同じ率 t による a に満たない部分の給付を意味する。すなわち，x^* は税率 t，課税最低限 a という負の所得税による再分配をあらわしている。この再分配 x^* とコアとの間には次の関係が成立する。

定理 I (i) x^* はコアに属する。

(ii) 条件：$\sum_{i\in N} m_i-na>m_i-a$ *for all* $i\in N$ が成立するならば，x^* のみがコアに属する。

証明はこの節の終わりに述べる。(i)は，もし，再分配 x^* が提示されたならばそれはこれ以上決して改善することのできない再分配であることを意味している。(ii)はさらに，もし課税最低限 a が十分小さく，

$$a<(\sum_{i\in N} m_i-m_i)/(n-1)$$

を満たしているならば，x^* のみがこれ以上改善されないものとして残る再分

(2) S 内の任意の再分配を $\{y_i\}i\in S$ とすると，$\sum_{i\in S} y_i=\sum_{i\in S} m_i$. このとき S の各主体の課税額の合計 $T(y.S)$ について

$$\begin{aligned}T(y,S)&=\sum_{i\in S} t\cdot max(0,y_i-a)\\&\geqq t\cdot max(0,\sum_{i\in S} y_i-|S|\cdot a)\\&=t\cdot max(0,\sum_{i\in S} m_i-|S|a)\end{aligned}$$

が成立するから，（Ib）の右辺は S 内の各主体が確保し得る所得の合計の最大値をあらわす。

配であることを示している。われわれの目的からすれば，この(ii)の方がより大きな意味をもっている。課税ルール(1)は再分配を意図していないから，課税当局が上記の負の所得税を採用するという保証はない。それにもかかわらず，税としての支払いをできる限り小さくしようとする各主体の行動は，その負の所得税によるものと同等な再分配に導びくのである。このような結果になるのは，税を回避したいという高所得者の動機が，低所得者に交渉力を与えることになるからである。すなわち，社会的価値判断ではなく，低所得者に付与された power が再分配をひき起こしていると言える。

（定理Ⅰの証明）

(i)　x^* は改善されると仮定しよう。すると，あるSに対し

(Ia)　$u_i(\bar{x}_i) > u_i(x_i^*)$ *for all* $i \in S$

(Ib)　$\sum_{i \in S} \bar{x}_i \leqq \sum_{i \in S} m_i - t \cdot max(0, \sum_{i \in S} m_i - |S| \cdot a)$

を満たす $x = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \in X$ が存在する。u_i の単調性から，(Ia) によって

$$\bar{x}_i > x_i^* \quad for\ all\ i \in S$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\sum_{i \in S} \bar{x}_i &> \sum_{i \in S} x_i^* \\ &= \sum_{i \in S} m_i - t(\sum_{i \in S} m_i - |S|a) \\ &\geqq \sum_{i \in S} m_i - t \cdot max(0, \sum_{i \in S} m_i - |S|a).\end{aligned}$$

これは (Ib) に矛盾する。よって x^* はコアに属する。

(ii)　$x^* \fallingdotseq x$ なる $x = (x_1, \cdots, x_n) \in X$ もまたコアに属すると仮定しよう。すると，ある $j \in N$ について $x_j^* < x_j$ である。$M = \sum_{i \in N} m_i$ とおくと，(ii)の条件より $M - na > m_i - a$ (*for all* $i \in N$)。

ゆえに，$S = N - \{j\}$ について，

$$\begin{aligned}&\sum_{i \in S} m_i - t \cdot max\ (0, \sum_{i \in S} m_i - |S|a) \\ &= M - m_j - t \cdot max(0, M - m_j - (n-1)a) \\ &= M - m_j - t(M - m_j - (n-1)a) \\ &= [M - t(M - na)] - [m_j - t(m_j - a)]\end{aligned}$$

$=[M-t(M-na)]-x_j^*$

$>[M-t(M-na)]-x_j$

$\geqq \sum_{i\in S} x_i.$

したがって，$S=N-\{j\}$ について，

$\bar{x}_i > x_i \ for \ all \ i \in S,$ ……(1)

$\sum_{i\in S} \bar{x}_i \leqq \sum_{i\in S} m_i - t\cdot max(0, \sum_{i\in S} m_i - |S|a)$ ……(2)

を満たす $\bar{x}=(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)\in X$ が存在する。ところが(1)から

$u_i(\bar{x}_i) > u_i(x_i) \ for \ all \ i\in S$

これと(2)から，$x=(x_1, \cdots, x_n)$ は改善されることになり，x がコアに属することに矛盾する。ゆえに，x がコアに属するならば $x=x^*$ でなければならない。（証明終わり）

2. モ デ ル Ⅱ.

次に，各主体の効用関数が相互依存性をもつと仮定する場合について考察する。むろん，このように相互依存性をもつ場合とそうでない場合とに分けて考察するのは分析上の便宜からのことであり，現実にどうであるかについて論ずることはわれわれの考察の範囲を超える。ただし，相互依存性を仮定することの方が形式上はいくらか一般的だと言えるだろう。

さて，Thurow〔8〕に述べられている考えを定式化するためには，公共財としての所得分配を「供給」するための各主体の費用負担を考えなければならない。われわれはまず再分配の「実行費用」はゼロであると仮定する。そして，再分配のサイズを決定するため，各主体はそれぞれ税を課されるものとする。課税後に残る主体 i の所得をx_iとしよう。すると，課税額の合計は

$\sum_{i\in N} m_i - \sum_{i\in N} x_i$

で与えられる。ここで，この額を各主体へ再分配すると考えれば，実現する再分配ベクトル $y=(y_1, \cdots y_n)$ は，

$\sum_{i\in N} y_i = \sum_{i\in N} m_i - \sum_{i\in N} x_i$

に従わなければならない。各主体 i は，所得 x_i と，こうして実現される再分配ベクトル y に関して定義された効用関数 $u_i(x_i, y)$ をもつ。すなわち再分配ベクトル y は純粋公共財として各主体の効用関数の中に入ってくることになる。主体 i の最終的所得は，x_i+y_i で与えられるが，これに対する i の評価は他の主体 j への分配 y_j に影響されるわけである。このように表現するためには，各主体 i は，他の任意の主体 j の課税後に残る所得 x_j には無関心であるという仮定が必要である。この点については，われわれの課税システムがまさに再分配のためのものであことを考えれば，各主体の第1の関心は $\sum_{i\in N} m_i - \sum_{i\in N} x_i$ がいかに分配されるかにあるとみてよいだろう。このようにしてわれわれのモデルにおける相互依存性が定式化される。

各主体の課税後に残る所得と再分配による所得の組 $(x, y)=(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ をあらためて再分配とよぶことにする。集合 Z を次のように定義する。

$$Z=\{(x, y):x_i\geqq 0, y_i\geqq 0 \ \textit{for all}\ i\in N,$$
$$\sum_{i\in N} x_i+\sum_{i\in N} y_i\leqq\sum_{i\in N} m_i\}$$

$(x, y)\in Z$ であるとき，(x, y) を実行可能な再分配とよぶ。また次のような実行可能再分配 (x, y) をパレート最適再分配とよぶ。(3)

$$u_i(\bar{x}_i, \bar{y})\geqq u_i(x_i, y) \quad \textit{for all}\ i\in N$$
$$u_j(\bar{x}_j, \bar{y})> u_j(x_j, y) \quad \textit{for some}\ j\in N$$

ならば，

$$(\bar{x}, \bar{y})\notin Z.$$

われわれは，とくに課税が比例所得税によって行なわれる場合の再分配を考察

(3) 後に述べる仮定IIの u_i の単調性と連続性によって，この定義は $\bar{x}=(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)>0$ のとき次のものと同値になる。

$$u_i(\bar{x}_i, \bar{y})> u_i(x_i, y) \ \textit{for all}\ i\in N$$

ならば

$$(\bar{x}, \bar{y})\notin Z.$$

する。そこで，税率を t とするとき次のような実行可能再分配 (x, y) を t−再分配とよぶ。(4)

$$x_i=(1-t)m_i \quad (i \in N)$$

$$\sum_{i \in S} y_i=t\sum_{i \in N} m_i$$

(x, y) が t−再分配ならば，$0 \leqq t \leqq 1$ となる。パレート最適な t−再分配が存在するとき，これを t−最適再分配と言う。また，(x, y) が t−最適であるとき，その税率 t を最適税率とよぶ。

各主体 i の効用関数 $u_i(x_i, y)$ に，次の仮定をおく。

仮定Ⅱ． $u_i(x_i, y)$ は $x_i \geqq 0, y=(y_1, \cdots, y_n) \geqq 0$ に対し，連続，単調増加かつ凹である。ここで，単調性は次の意味に用いる。

$$(\bar{x}_i, \bar{y}) \geqq (x_i, y), \ \bar{x}_i \neq x_i \ or \ \bar{y}_i \neq y_i$$

$$\text{ならば} \quad u_i(\bar{x}_i, \bar{y})>u_i(x_i, y)$$

つまり，各主体については少なくとも同レベルを保ち，自分に関しては実際に増加するような再分配の変化は，その主体についても受け入れられる。また凹性については，各主体が，任意の2つの無差別な再分配の平均化は望ましいという価値判断をもっていることを意味する。再分配の変化に対し各主体が下す価値判断についてわれわれが仮定することはこれだけである。このような効用関数のもとで，所得分配の初期状態 $(m_1, \cdots, m_n)$ がパレート最適でなければ，パレート最適な再分配へ向けての変化は，すべての主体に受け入れられると考

---

(4) (x, y) が t-再分配であるとき，主体 $i \in N$ の最終的所得 z_i は，次のような形をしている。

$$z_i=x_i+y_i=(1-t)m_i+\theta_i tM$$
$$=m_i-t(m_i-\theta_i M)$$

ここに，$M=\sum_{i \in N} m_i$，また，$\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ は

$$0 \leqq \theta_i \leqq 1 \quad for \ all \ i \in N,$$
$$\sum_{i \in N} \theta_i=1$$

を満たすある分配率である。

えることができる。ここでのわれわれの目的は，比例所得税を通じてのパレート最適の達成を考察することである。

その前に，次の事実を確認しておく。

定理Ⅱ.1. 仮定Ⅱおよび，仮定：$m_i>0$ *for all* $i \in N$ のもとで $t-$最適再分配が存在する。

証明は巻末の Appendix に述べる。

2.1. t−コア

いま，税率 $t(0 \leqq t \leqq 1)$ が課税当局によって設定されたとしよう。このとき，この税率 t のもとでの $t-$再分配は無数に存在するが，それらがパレート最適であるという保証はない。他方，もしこの税率が最適税率であったならば，この t のもとでパレート最適な再分配を選ぶことは妥当なことである。しかし，いかにしてその $t-$最適再分配に到達するかという問題，またこの t が最適税率でないとき，この税率のもとでどんな再分配を選ぶのかという問題が生ずる。さらに，これらの税率が最適であるか否かについては前もってこれを知ることはできないのである。

われわれは，このような問題に以下のようにしてアプローチしよう。それは，モデルⅠにおけると同様に，各主体がグループを形成し，彼らの動機と実行力とにもとづいて，再分配のプランを改訂するというプロセスを定式化することである。いま，ある再分配 (x, y) が提案されているとしよう。このとき，N の，ある空でない部分集合 S について次の条件を満たす再分配 $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ が存在するならば，(x, y) は **$t-$改善**されると言う。

(Ⅱa) $u_i(\bar{x}_i, \bar{y}) > u_i(x_i, y)$ *for all* $i \in S$

(Ⅱb) $\sum_{i \in S} \bar{x}_i + \sum_{i \in N} \bar{y}_i \leqq \sum_{i \in S} m_i + t \sum_{i \in N-S} m_i$

(Ⅱc) $S \neq N$ ならば $\bar{y} \geqq y$.

条件 (Ⅱa) は，S 内の主体は一致して再分配 (x, y) よりも $(\bar{x}, \bar{y})$ の実現を望むことを意味する。(Ⅱb) は，再分配 $(\bar{x}, \bar{y})$ が S 内の主体に関する部分については，S 内の所得総額と $N-S$ からの課税額を合計すれば達成可能である

ことを意味する。つまり，われわれはここで，Sは課税当局にかわって，設定されている税率のもとでS以外の各主体に対して課税することを許されている，と仮定している。このように仮定したからには，Sはすべての主体に対する分配yに責任を負わなければならないだろう。これと関連する条件が（Ⅱc）である。すなわち，yのレベルの変化はS以外の主体の welfare にも影響を及ぼすので，Nのすべての主体が一致しない限り任意に操作することは許されず，少なくとも変化する前のレベルを保証する方向にしか変化は許されない，というルールを表現している。このルールの決定的な役割は，もしそれがないと，どんな小さなグループSも $t(>0)$ に依存して過大な実行力を付与されることになるという点にある。したがって，このことを防ぐためのルールならばどんなものでもよいと考えられるが，われわれは妥当と考えられる（Ⅱc）を採用する。

このような $t-$改善という手続きによってはもはや他のものにおきかえることのできない再分配があるとすれば，それがわれわれの求めるものである。次のように定義しよう：$t-$改善されない再分配 (x,y) の全体を$t-$コアとよぶ。この $t-$コアは次のように特徴づけられる。

定理Ⅱ.2.　$K(t)=\{(x,y):(x,y)$ はパレート最適で，$x_i \leqq (1-t)m_i$ *for all* $i \in N\}$ とする。このとき，$t-$コアと $K(t)$ は一致する。

証明は Nakayama〔5，Proposition 1〕とほとんど同じであるから省略する。この定理によって，われわれは $t-$コアとはどんなものかを知ることができる。すなわち，任意に設定された税率 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ に対して，$t-$コアは，各主体が少なくとも税率 t のもとで要求される額を再分配のために供出しているようなパレート最適再分配の全体である。定理Ⅱ.1. より，$t-$最適再分配が存在するから，最適税率を t^*とすれば，任意の t $(0 \leqq t \leqq t^*)$ に対し，$t-$コアは空でないことがわかる。

さて，この定理Ⅱ.2. は，われわれの目的からすればまだ不十分である。与えられた税率 t に対して $t-$コアが空集合でなければ結果的にパレート最適性

が保証されるが，この場合でも素朴な意味において，tーコアは一般に大きすぎるだろう。また，tーコアが空集合であれば，いかなる再分配もtー改善の余地を残し，決定がつかない。すなわち，税率tのレベルを適切に決定するという問題が残されているのである。

この問題をたとえば次のように考えてみよう。定理Ⅱ.2. から，

$t_1 \leqq t_2$　ならば　t_1ーコア$\supset t_2$ーコア

である。つまり，税率tの上昇にともないtーコアは収縮する。したがって，課税当局が税率を操作するものとし，たとえば$t=0$から徐々に上昇させれば，選択の範囲を逐次的にせまくしてゆくことが可能である。もし，$t=t^0 (t \leqq 1)$でtーコアが空集合となるとすれば，その直前でtのレベルを固定して，実際にゲームを行なわせるということが考えられる。しかし，この考えを具体化するためには，たとえば「tー改善案」の数の変化から，tーコアの大きさの変化を推定するというような，tーコアの収縮を「観測」するための何らかの手段の考案が必要であろう。

われわれは，この方向に問題を進めないでより自己完結的なやり方でこの問題を処理したいと考える。そのため，tー改善の手続きを若干修正することを試みる。まず，次のような関数$t(x)$を定義しよう。

$$t(x)=1-\sum_{i \in N} x_i / \sum_{i \in N} m_i$$

実行可能な再分配(x, y)に対しては，$0 \leqq t(x) \leqq 1$となる。すなわち，$t(x)$は，再分配(x, y)において，総所得に対しどれだけの割合でyのための供出がなされているかということをあきらかにしている。われわれは，この$t(x)$を用いて再分配$(x\ y)$をtー改善するときの税率tを定義しよう。つまり，条件（Ⅱb）を次の（Ⅱb'）でおきかえる。

（Ⅱb'）　$\sum_{i \in S} \bar{x}_i + \sum_{i \in N} \bar{y}_i \leqq \sum_{i \in S} m_i + t(x) \sum_{i \in N-S} m_i$

こうして新たな改訂の手続きを定義することができる。この手続きを **eー改善**とよぶ。したがって，条件（Ⅱa），（Ⅱb'）および（Ⅱc）を満たす再分配$(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$が，ある空でないSについて存在するならば，再分配(x, y)はeー改善さ

れる。そして，e−改善されない再分配 (x, y) の全体を，e−コアとよぶ。

関数 $t(x)$ は，S が再分配 (x, y) を改訂しようとするにあたって，$N-S$ の各主体に対する課税率を自己完結的に決定するためのひとつのルールにすぎないが，恐らくこれが最も簡潔なものである。そしてこの e−コアがわれわれの求めるものである。

定理Ⅱ.3. e−コアは，$t(x)$−最適再分配 (x, y) の全体と一致する。

証明は，Nakayama〔5，Proposition 2〕とほとんど同じであるから省略する。こうして，再分配 (x, y) は，$t=t(x)$ が最適税率であるとき，およびそのときに限り t−改善されないという結果が得られる。つまり，もし e−改善という手続きに従って再分配 (x, y) を改訂してゆくならば，最終的に t−最適な再分配だけがこれ以上改訂されない再分配として残ることになる。言いかえれば，e−改善の手続きは t−最適再分配に到達するための一連のルールを与えているのである。

モデルⅠにおいて，税を回避しようとする行動が，課税最低限が低い場合に唯一の再分配に導いたが，このモデルⅡにおける e−改善のルールは唯一の再分配に導くとは限らないだろう。脚注4から，

$$Z_i = m_i - t(m_i - \theta_i M) \quad (i \in N)$$

の形の所得 z_i を与える t−最適再分配が，e−改善の後に残るが，t と $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ の一意性はかならずしも保証されないからである。ただし，効用関 u_i の凹性を強い意味で用いれば，$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ の一意性は保証される。[(5)] つまり，t が最適税率ならば t−最適再分配は確定する。また，t−最適再分配自身の一意性は，さらに微分可能性を仮定すれば恐らく証明できるだろう。しかし，われわれの目的からすれば，t−最適再分配が t に対応して確定すれば十分である（つまり，強い凹性の仮定で十分）。何故なら，最適税率は e−改善のプロセスの中から $t(x)$ として決まるのであり，どの率を選ぶかという問

---

(5) 定理Ⅱ1.の証明（Appendix）の中の補題2参照。強い凹性のもとでは $Z(\alpha)$ は一点のみから成る集合となる。

題は生じないからである。

お　わ　り　に

ここで考察したモデルは，いずれも所得再分配の根拠を各主体の私的動機に求めるという考えを表現したものである。私的動機にもとづいて各主体が提携し，この提携のもつ power を根拠として分配を決定するという考え方は，特性関数型 n 人協力ゲームの基本的発想である〔9〕. したがって，所得再分配という問題にゲーム理論の考え方を適用することはむしろ自然であるばかりでなく，ある意味で現実的である。実際，最近の論文の中で Aumann と Kurz〔1〕は，多数決という政治的プロセスにより多数派が少数派に対して課税し，少数派は自己の資産をもし欲するならば自ら破壊するという脅しを行使することによって多数派に対抗するという考えにもとづく再分配のモデルを提示している。このモデルの背後にあるのは，多数派の power と，上記の脅しによって付与される少数派の power が，両者を交渉に導くという考えであり，最適な分配とはこのような power を背景とする交渉で決まる，という認識である。この認識が決して irrelevant なものではないことは，彼らの導いた多くの結論が現実的な文脈からみて説得力と示唆に富むものであることからも理解される。このような，ゲーム理論的観点からの分析が，今後，所得分配の理論の新たな局面の展開に大きな役割を果たすということは十分に期待し得ることである。

Appendix（定理Ⅱ.1. の証明）

仮定Ⅱ.　$u_i(x_i, y)$ は $x_i \geqq 0, y=(y_1, \cdots, y_n) \geqq 0$ に対し，連続，単調増加かつ凹である。

定理Ⅱ.1.　仮定Ⅱおよび仮定：$m_i>0$ *for all* $i \in N$ のもとで t－最適再分配が存在する。

まず，２つの補題を証明する。補題１は，非線型計画法に関する定理からただちに導かれるが（e. g. Takayama〔7, Theorem 1. E. 6.〕)，完結性のため証明を与える。

R_+^k によって，k 次元ユークリッド空間の非負象限をあらわすことにする。

補題1． $A=\{\alpha\in R_+^n : \sum_{i\in N}\alpha_i=1\}$ とする。

(i)　(x,y) がパレート最適であるための十分条件は，

$$\sum_{i\in N}\alpha_i u_i(x_i,y)\geqq\sum_{i\in N}\alpha_i u_i(\bar{x}_i,\bar{y})\quad \textit{for all}\ (\bar{x},\bar{y})\in Z$$

となるような $\alpha\in A$ が存在することである。

(ii)　$\alpha\in A$ と (x,y) が上記の条件を満たすとする。このとき，$\alpha_i=0$ ならば $x_i=0$ である。

証明（十分性）．(x,y) はパレート最適でないとする。すると，u_i の連続性と単調性から

$$u_i(\bar{x}_i,\bar{y})>u_i(x_i,y)\quad \textit{for all}\ i\in N$$

となる $(\bar{x},\bar{y})\in Z$ が存在する。したがって，任意の $\alpha\in A$ に対して，

$$\sum_{i\in N}\alpha_i u_i(\bar{x}_i,\bar{y})>\sum_{i\in N}\alpha_i u_i(x_i,y).$$

これで十分なることが証明された。

(ii)　$x_i>0$ と仮定しよう。このとき，(x,y) の十分近くに次のような $(\bar{x},\bar{y})\in Z$ が存在する。

$$\bar{y}=y$$
$$\bar{x}_i\leqq x_i\quad \textit{if}\ \alpha_i=0$$
$$\bar{x}_i>x_i\quad \textit{if}\ \alpha_i>0.$$

すると，u_i の単調性から $\alpha_i>0$ なる $i\in N$ に対して $u_i(\bar{x}_i,\bar{y})>u_i(x_i,y)$．ゆえに，

$$\sum_{i\in N}\alpha_i u_i(\bar{x}_i,\bar{y})>\sum_{i\in N}\alpha_i u_i(x_i,y).$$

これは矛盾である。（証明終わり）

ここで，次のような集合 $Z(\alpha)$ を定義する。

$$Z(\alpha)=\{(x,y)\in Z:\sum_{i\in N}\alpha_i u_i(x_i,y)\geqq\sum_{i\in N}\alpha_i u_i(\bar{x}_i,\bar{y})\ \ \textit{for all}\ (\bar{x},\bar{y})\in Z\}$$

補題2. 仮定IIのもとでは，$Z(\alpha)$ はAの点 α に Z の空でない凸部分集合を対応させる閉写像である。

証明，空でないことはあきらかである。凸性は，u_i の凹性から従う。閉写像であることを証明しよう。$\{\alpha^l\}$，$\{(x^l,y^l)\}$ を次のような列とする。

$$\lim_{l\to\infty}\alpha^l=\alpha,\ \lim_{l\to\infty}(x^l,y^l)=(x,y)$$
かつ，$(x^l,y^l)\in Z(\alpha^l)\quad(l=1,2,\cdots)$.

$(x,y)\notin Z(\alpha)$ としよう。すると，次のような $(\bar{x},\bar{y})\in Z$ が存在する。

$$\sum_{i\in N}\alpha_i u_i(\bar{x}_i,\bar{y})>\sum_{i\in N}\alpha_i u_i(x_i,y).$$

したがって，u_i の連続性から十分大きい l に対して

$$\sum_{i\in N}\alpha_i^l u_i(\bar{x}_i,\bar{y})>\sum_{i\in N}\alpha_i^l u_i(x_i^l,y^l)$$

ところがこれは

$$(x^l,y^l)\in Z(\alpha^l)$$

なることに矛盾する。（証明終わり）

さて

$$W=\{x\in R_+^n:(x,y)\in Z\ \ \textit{for some}\ y\in R_+^n\}$$
$$W(\alpha)=\{x\in R_+^n:(x,y)\in Z(\alpha)\ \ \textit{for some}\ y\in R_+^n\}$$

と定義しよう。Wは Z の R_+^n 上の射影であり，Zが凸でコンパクトであるから，Wもまた凸でコンパクトである。同様に，写像 $W(\alpha)$ は A の点 α をWの空でない凸部分集合 $W(\alpha)$ に移す閉写像である。

定理II.1.の証明，

$f_i(\alpha,x)$ を次のように定義する。

$$f_i(\alpha,x)=\frac{\alpha_i+\max_j(x_j/m_j)-x_i/m_i}{1+\sum_{i\in N}(\max_j(x_j/m_j)-x_i/m_i)}\qquad\cdots\cdots(1)$$

f_i の連続性はあきらかである。すると，$f(\alpha,x)=(f_1(\alpha,x),\cdots,f_n(\alpha,x))$ は，

$A \times W$ の点をAの点に移す連続写像である。次に,

$$f(\alpha, x) \times W(\alpha) \qquad \cdots\cdots(2)$$

で定義される写像を考える。補題2によってこれは $A \times W$ の点に $A \times W$ の空でない凸部分集合を対応させる閉写像である。$A \times W$はコンパクトな凸集合であるから，角谷の定理（e. g. Nikaido〔6〕）によって不動点 (α, x) が存在して,

$$(\alpha, x) \in f(\alpha, x) \times W(\alpha).$$

この不動点 (α, x)から，tー最適再分配が得られることを示そう。

$x \in W(\alpha)$ であるから，$(x, y) \in Z(\alpha)$ なる $y \in R^n_+$ がある。補題1(i)から，この (x, y) はパレート最適である。

ある $i \in N$ について，$\alpha_i = 0$ としよう。(1)と(2)から，$\max_j (x_j/m_j) = x_i/m_i$. 補題1(ii)から $x_i = 0$ である。ゆえにすべての $j \in N$ について $x_j = 0$, したがってこの場合，(x, y) は,

$$t = 1$$

$$x_i = (1-t)m_i \quad (i \in N)$$

$$\sum_{i \in N} y_i = t \sum_{i \in N} m_i$$

の形をしているパレート最適再分配である。

次に，$\alpha_i > 0$ (*for all* $i \in N$) としよう。このとき,

$$\max_j (x_j/m_j) = x_i/m_i \quad \textit{for all } i \in N$$

でなければならない。何故ならば，そうでないとすると

$$\sum_{i \in N} (\max_j (x_j/m_j) - x_i/m_i) > 0.$$

ところがある $i \in N$ については,

$$\max_j (x_j/m_j) = x_i/m_i$$

であるから，この i について(1)と(2)から $\alpha_i = 0$, これは矛盾である。ゆえに，この場合 (x, y) は

$$t = 1 - k, \quad 0 \leqq k \leqq 1$$

$$x_i = k \cdot m_i \quad \textit{for all } i \in N.$$

$$\sum_{i\in N} y_i = t\sum_{i\in N} m_i$$

の形をしている。ここで $0\leqq k\leqq 1$ なることは $(x,y)\in Z$ から従う。ゆえに (x,y) は t－最適再分配である。　（証明終わり）

参 考 文 献

[1] R. J. Aumann and M. Kurz, Power and Taxes, Econometrica 45 (1977), 1137-1161.

[2] H. M. Hochman and J. D. Rodgers, Pareto Optimal Redistribution, American Economic Review 59 (1969), 542-557.

[3] H. M. Hochman, J. D. Rodgers and G. Tullock, On the Income Distribution as a Public Good, Quarterly Journal of Economics 87 (1973), 311-315.

[4] M. Nakayama, A Note on the Core of an Income Redistribution Game, Journal of Economic Theory 12 (1976), 347—349.

[5] M. Nakayama, Proportional Income Taxes and Cores in a Public Goods Economy, Journal of Economic Theory 15 (1977), 295-300.

[6] H. Nikaido, "Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics", North-Holland, Amsterdam 1970.

[7] A. Takayama, "Mathematical Economics", The Dryden Press, Illinois, 1974.

[8] L. C. Thurow, The Income Distribution as a Pure Public Good, Quartely Journal of Economics 85 (1971), 327-336.

[9] J. von Neumann and O. Morgenstern, "Theory of Games and Economic Behavior", Princeton University Press, Princeton 1944.