

# アダプティブ有限要素法に対するメッシュ生成法の評価

## Evaluation of Mesh Generation Strategies on Adaptive Finite Element Method

大森 克史 篠原 信夫\*  
Katsushi OHMORI and Nobuo SHINOHARA

ohmori@edu.toyama-u.ac.jp

nsinohara-tky@umin.ac.jp

### Abstract

In the finite element analysis for physical phenomena, it is important to use the finite element mesh so as to capture some features of them reasonably. Recently, the adaptive finite element method based on a posteriori error estimator is worthy of attention from both mathematical and computational points of view. In this paper we consider the performance of some strategies for the adaptive mesh-refinement of triangulations in this method.

## 1 はじめに

有限要素解析におけるメッシュについて、メモリ等限りあるコンピュータ資源の有効利用や、より精度の高い計算を行うため、一様に細かく要素分割を行うのではなく、与えられた問題に適合させるようなメッシュの作成、例えば物理量の変化が激しい部分に節点を集中させるようなアダプティブ有限要素法の研究が盛んに行われている。しかし、物理量分布の予測によるものや、領域の形状にのみ適合したメッシュ分割など、解析者の経験に左右されたり、必ずしも問題に適合しない方法が主に扱われている。本研究では、有限要素解の事後誤差評価の研究 [7] をふまえ、Poisson 方程式について Verfürth が示した指標 [1] を用いることにより事後誤差評価によるアダプティブ有限要素メッシュの自動作成、及びメッシュを作成する際に用いたいくつかの要素分割法の評価を行った。

## 2 モデル問題

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^2$  の連結有界多角形領域とし、その境界を  $\Gamma$  とする。  $\Omega$  の開部分集合  $\omega$  とその境界  $\gamma := \partial\omega$  について通常の Lebesgue 空間, Sobolev 空間  $L^2(\omega), L^2(\gamma), H^1(\omega)$  を定義し、ノルムをそれぞれ  $\|\cdot\|_{0,2;\omega}, \|\cdot\|_{0,2;\gamma}, \|\cdot\|_{1,2;\omega}$  とする。

\* 東京大学大学院医学系研究科  
医学博士課程社会医学専攻 (医療情報経済学)

本研究では、 $\Omega$  における Dirichlet-Neumann 混合型境界条件を持つ Poisson 方程式を考える。

$$(E) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{on } \Gamma_N. \end{cases}$$

ただし、 $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  であり、 $\Gamma_D$  は  $\Gamma$  に対して閉で、正の長さを持つとする。ここで、 $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Gamma_N)$  を仮定する。

空間  $X$  を次のように定義する。

$$X := \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$$

ここで問題 (E) に対する弱形式は次の様に見える。

$$(II) \begin{cases} \text{Find } u \in X \text{ such that} \\ a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in X, \end{cases}$$

ただし

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \\ \langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} g v \, ds.$$

(II) は一意解を持つ。

### 3 有限要素法

$\mathcal{T}_h (h > 0)$  を  $\Omega$  の三角形分割とする. ここで  $\mathcal{T}_h$  の要素  $T_i$  は閉三角形であり, その数を  $N_T$  とする. 分割は次の 1) から 3) の条件を満たす.

- 1)  $\bar{\Omega}$  は  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_T} T_i$  と分割される.
- 2) 要素の内点集合は  $\text{int } T_i \cap \text{int } T_j = \emptyset (i \neq j)$  を満たしている.
- 3)  $T_i \cap T_j (i \neq j)$  は空集合か, 共通の 1 頂点か, 共通の 1 辺である.

以下, 三角形分割の族  $\mathcal{T}_h$  は正則と仮定する. 即ち, 任意の要素  $T \in \mathcal{T}_h$  の任意の角  $\theta$  に対し,  $\theta \geq \theta_0 > 0$  を満たす定数  $\theta_0$  が存在する.

問題 (II) について, 三角形一次要素を用いる有限要素近似を行う. 上記の定義を前提とし, 次の有限要素空間を定義する.

$$X_h := \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \mid v_h|_T \in \mathcal{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \\ v_h = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$$

このとき, (II) に対する近似問題は次のように表される.

$$(\Pi_h) \begin{cases} \text{Find } u_h \in X_h \text{ such that} \\ a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle \quad \forall v_h \in X_h, \end{cases}$$

近似問題  $(\Pi_h)$  の解は存在し, 一意である ([8] 等).

### 4 誤差の指標

近似問題  $(\Pi_h)$  の有限要素解  $u_h$  の事後誤差評価を得るためには, 有限要素解の他, 与えられたデータ (メッシュデータや境界条件等) より計算される正確な誤差の指標が必要である.

#### 4.1 記号の定義

$T \in \mathcal{T}_h$  に対して,  $E$  を  $T$  の 1 つの辺とする.  $|T|, h_T, h_E$  をそれぞれ  $T$  の面積,  $T$  の最長辺の長さ,  $E$  の長さとする. また,  $n_E$  を  $E$  と直交する単位ベクトルとし, 辺  $E$  を横切る値の差

$$[\varphi]_E := \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(x + tn_E) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(x - tn_E) \\ \forall x \in E$$

を定義する. 各要素  $T \in \mathcal{T}_h$  に対して, その要素の辺の集合を  $\mathcal{E}(T)$  とし, 三角形分割  $\mathcal{T}_h$  の辺全体の集合

$$\mathcal{E}_h := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}(T)$$

を定義する. また,  $\mathcal{E}_h$  を次のように分割する.

$$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_{h,\Omega} \cup \mathcal{E}_{h,D} \cup \mathcal{E}_{h,N}$$

ただし

$$\mathcal{E}_{h,D} := \{E \in \mathcal{E}_h \mid E \subset \Gamma_D\}$$

$$\mathcal{E}_{h,N} := \{E \in \mathcal{E}_h \mid E \subset \Gamma_N\}$$

すなわち,  $\mathcal{E}_{h,D}, \mathcal{E}_{h,N}$  はそれぞれ Dirichlet 境界, Neumann 境界上の辺の集合である.

さらに,  $T \in \mathcal{T}_h$  と辺を共有する三角形要素全体の領域  $\omega_T$  を次のように定義する.

$$\omega_T := \bigcup_{\mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}(T') \neq \emptyset} T'$$

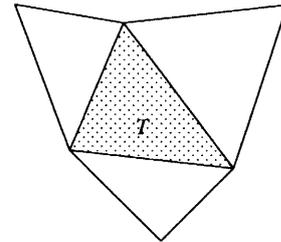


Fig.4.1  $\omega_T$

#### 4.2 残差事後誤差指標

問題 (E) の条件の元で, 次の 2 つの評価が成り立つ.

##### Proposition 4.1.

$u, u_h$  をそれぞれ (II),  $(\Pi_h)$  の解とすると, 任意の  $w \in X$  について次の評価が成立する. ただし,  $C_\Omega$  は  $\Omega$  と  $\Gamma_D$  へのみ依存する正定数である.

$$\sup_{w \in X, \|w\|_{1,2;\Omega} = 1} \{\langle F, w \rangle - a(u_h, w)\} \\ \leq \|u - u_h\|_{1,2;\Omega} \\ \leq (1 + C_\Omega^2) \sup_{w \in X, \|w\|_{1,2;\Omega} = 1} \{\langle F, w \rangle - a(u_h, w)\}$$

*Proof.* )  $u \in X, u_h \in X_h$  をそれぞれ (II),  $(\Pi_h)$  の解とすると, 次式が成り立つ.

$$\int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla w \, dx = \langle F, w \rangle - a(u_h, w) \\ \forall w \in X.$$

ここで, Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx &\leq \|\nabla v\|_{0,2;\Omega} \cdot \|\nabla w\|_{0,2;\Omega} \\ &\leq \|v\|_{1,2;\Omega} \cdot \|w\|_{1,2;\Omega} \end{aligned}$$

であるから,

$$\sup_{w \in X, \|w\|_{1,2;\Omega}=1} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx \leq \|v\|_{1,2;\Omega}$$

が成り立つ.

一方 Poincaré-Friedrich の不等式より

$$\begin{aligned} \|v\|_{1,2;\Omega}^2 &\leq \|v\|_{0,2;\Omega}^2 + \|\nabla v\|_{0,2;\Omega}^2 \\ &\leq (1 + C_{\Omega}^2) \|\nabla v\|_{0,2;\Omega}^2 \\ &= (1 + C_{\Omega}^2) \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx \end{aligned}$$

であり, ここで  $w = \frac{v}{\|v\|_{1,2;\Omega}}$  と取ると

$$\|v\|_{1,2;\Omega} \leq (1 + C_{\Omega}^2) \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx$$

を得る.  $v \in X$  より  $w \in X, \|w\|_{1,2;\Omega} = 1$  なので

$$\|v\|_{1,2;\Omega} \leq (1 + C_{\Omega}^2) \sup_{w \in X, \|w\|_{1,2;\Omega}=1} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx$$

が成り立つ.  $\square$

**Proposition 4.2.**

$u_h$  を  $(\Pi_h)$  の解とするとき, 任意の  $w \in X$  について次の評価が成立する. ただし,  $C_1$  は  $\mathcal{T}_h$  の最小角の大きさのみに依存する正定数である.

$$\begin{aligned} \langle F, w \rangle - a(u_h, w) &\leq C_1 \|w\|_{1,2;\Omega} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f\|_{0,2;T}^2 \right. \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|g - n_E \cdot \nabla u_h\|_{0,2;E}^2 \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{0,2;E}^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Proposition 4.1, 4.2 より次の評価を得る.

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,2;\Omega} &\leq C_2 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f\|_{0,2;T}^2 \right. \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|g - n_E \cdot \nabla u_h\|_{0,2;E}^2 \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{0,2;E}^2 \right\}^{1/2} \quad (4.1) \end{aligned}$$

ただし,  $C_2 = C_1 (1 + C_{\Omega}^2)$ .

Verfürth は, 近似問題  $(\Pi_h)$  に対する誤差の指標として, 個々の要素  $T \in \mathcal{T}_h$  に対して残差事後誤差指標  $\eta_{R,T}$  を次のように定義した [1].

$$\begin{aligned} \eta_{R,T} := &\left\{ h_T^2 \|f_T\|_{0,2;T}^2 \right. \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \|[n_E \cdot \nabla u_h]_E\|_{0,2;E}^2 \\ &\left. + \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|g_E - n_E \cdot \nabla u_h\|_{0,2;E}^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

ただし

$$f_T := \frac{1}{|T|} \int_T f \, dx, \quad g_E := \frac{1}{h_E} \int_E g \, ds$$

この  $\eta_{R,T}$  は有限要素解  $u_h$ , メッシュデータと問題  $(E)$  において与えられたデータ  $f, g$  によって各要素ごとに計算することができる. ここで,  $\eta_{R,T}$  の第 1 項は三角形要素  $T$  自身に固有の値であり, 第 2 項は隣り合う要素からの寄与, 第 3 項は Neumann 境界条件からの寄与である.

$\eta_{R,T}$  を用いて, (4.1) 式は次の (4.2) 式のように表すことができる. (4.2) 式より, 有限要素解  $u_h$  の  $H^1$ -ノルム誤差は  $\eta_{R,T}$  によっておさえられることがわかる.

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,2;\Omega} &\leq C_2 \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{R,T}^2 \right. \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f - f_T\|_{0,2;T}^2 \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|g - g_E\|_{0,2;E}^2 \right\}^{1/2} \quad (4.2) \end{aligned}$$

(4.2) 式を含め,  $\eta_{R,T}$  の誤差の指標としての正当性は, 次の定理で保証される.

**Theorem 4.3. (Verfürth[1])**

$u, u_h$  をそれぞれ  $(\Pi), (\Pi_h)$  の解とするとき, 全ての  $T \in \mathcal{T}_h$  について, 次の評価が成立する. ただし,  $\bar{C}, \underline{C}$  は  $\mathcal{T}_h$  の最小角の大きさのみに依存する正定数である.

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,2;\Omega} &\leq \bar{C} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{R,T}^2 \right. \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f - f_T\|_{0,2;T}^2 \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|g - g_E\|_{0,2;E}^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\eta_{R,T} \leq C \left\{ \|u - u_h\|_{1,2;\omega_T}^2 + \sum_{T' \subset \omega_T} h_{T'}^2 \|f - f_{T'}\|_{0,2;T'}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_{h,N}} h_E \|g - g_E\|_{0,2;E}^2 \right\}^{1/2} \quad \square$$

**Remark 4.4.**

有限要素法で用いられる三角形分割について、極端に角度の大きい角を持つ鈍角三角形要素や、極端に短い辺を持つ鋭角三角形要素が存在することは好まれない。このような三角形要素が存在する目安の1つとして、三角形分割における最小角の大きさに注目することができる。Theorem 4.3 では、最小角の大きさのみに依存する定数を用いて誤差の指標が上下から押えられている。□

## 5 有限要素メッシュの作成

### 5.1 事後誤差評価

ある三角形分割  $\mathcal{T}_h$  における  $(\Pi_h)$  の近似解  $u_h$  を得たとき、多くの問題では厳密解を解析的に求めることは難しいので、近似解  $u_h$  の誤差を直接計算することはできない。そこで Theorem 4.3 をふまえ、 $\eta_{RT}$  を各要素について計算することによって近似解の  $H^1$ -ノルム誤差を見積もることを考える。一般に有限要素法ではメッシュを細かくするほど近似解が厳密解に近づくことが保証されている。そこで、 $\eta_{RT}$  の大きい要素が近似解の  $H^1$ -ノルム誤差が大きい要素であると見当をつけ、その要素付近のメッシュを細かくすることにより、解に適合した有限要素メッシュを作成することができ、近似解の精度を上げることができる。

### 5.2 有限要素メッシュ自動作成の流れ

#### メッシュ自動作成 1 ステップの流れ

1. 初期メッシュ  $\mathcal{T}_h^0$  を構成する。  $k \leftarrow 0$ .
2. 三角形分割  $\mathcal{T}_h^k$  における有限要素解  $u_h$  を得る。
3.  $u_h$  の、各要素  $T \in \mathcal{T}_h^k$  についての誤差の指標  $\eta_{R,T}$  を計算する。
4.  $\eta := \max_{T \in \mathcal{T}_h^k} \eta_{R,T}$  を計算し、

$$\eta_{R,T} \geq K\eta \quad (0 < K < 1) \quad (5.1)$$

を満たす要素を分割要素として取り上げる。(選択要素と呼ぶことにする.)

5. 選択要素が決定した  $\mathcal{T}_h^k$  に対して定められた要素分割法を用いてメッシュ作成を行い、 $\mathcal{T}_h^{k+1}$  を得る。

6.  $k \leftarrow k + 1$ .

7. go to 2.

初期メッシュに対してこのステップを繰り返すことにより、解に適合した有限要素メッシュを自動的に作成していくことができる。

### 5.3 アダプティブメッシュ分割法

#### 5.3.1 基本となる分割

1つの三角形要素に対する基本的な分割を定義する。

##### 1. red 分割

3辺の中点を結ぶことにより合同な4つの三角形に分割する。

##### 2. blue 分割

まず2辺の中点を結び、その内の1辺(例えば、長い方)の中点から相対する頂点を結ぶことにより3分割する。

##### 3. green 分割

1辺(例えば mark 辺や最長辺)の中点と、相対する頂点を結ぶことにより2分割する。

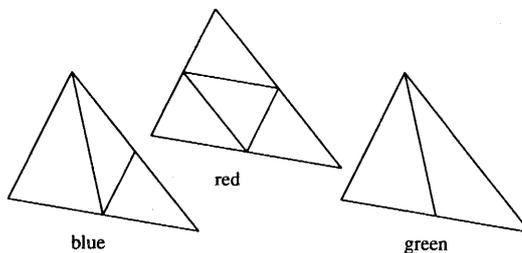


Fig.5.1 基本となる分割

#### 5.3.2 hanging node

三角形分割中のある要素の頂点が他の三角形の辺上にあるとき、この頂点を hanging node (nonconforming node) として定義する。

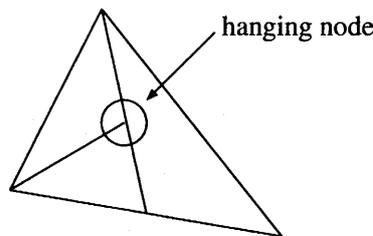


Fig.5.2 hanging node

### 5.3.3 regular 分割法

選択要素について red 分割をほどこすことにより、メッシュ作成を行う。選択要素が 4 分割されるので細分化ステップ数が少ない反面、hanging node も多く発生するため、その処理が難しい。hanging node の処理によって様々な種類が存在するが、本研究では red 分割と green 分割のみを用いて hanging node を処理する方法 [2] を用いた。

#### 分割の流れ

##### 1. 選択要素の処理

選択要素を red 分割する。

##### 2. hanging node の処理

- (1) hanging node が 2 個以上ある要素を red 分割する (新たに hanging node が発生する可能性がある)。hanging node が 2 個以上ある要素がなくなるまで繰り返し行う。
- (2) (1) の作業が終了した後、残った hanging node が 1 個の要素を green 分割する。

要素分割を 1 ステップ進ませた例を次の Fig.5.3 に示す。

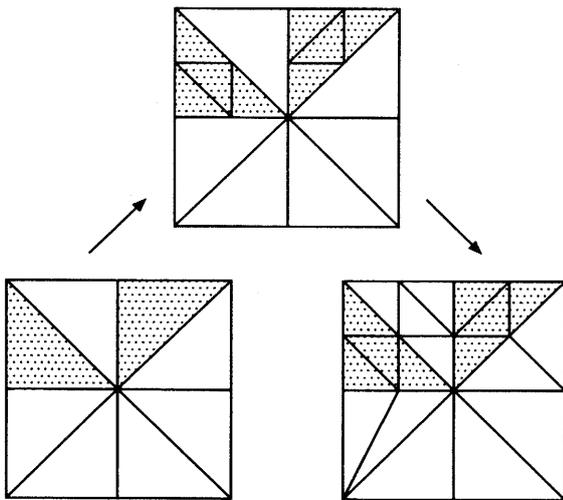


Fig.5.3 regular 分割法の要素分割例

この方法では作成される三角形分割の最小角の大きさが次第に小さくなってしまいう可能性がある。これに対し、最小角の大きさを保存した regular 分割法も考案されている [1,5].

### 5.3.4 marked edge 分割法

個々の三角形要素の属性として 1 つの辺をその要素の mark 辺として決めておき、選択要素の mark 辺に対して green 分割をほどこすことによりメッシュ作成を行う [3,4].

この方法の特徴は分割により生成する要素の形が判断でき、どんなにメッシュ作成ステップを重ねても三角形分割の最小角が保存され、いびつな形の要素ができないことである。それに対し、細分化ステップ数は多くなる。

#### 基本分割

1. mark 辺に対して green 分割する。
2. 発生した子要素の mark 辺として、元の親要素の mark 辺以外の 2 辺をそれぞれ指定する。

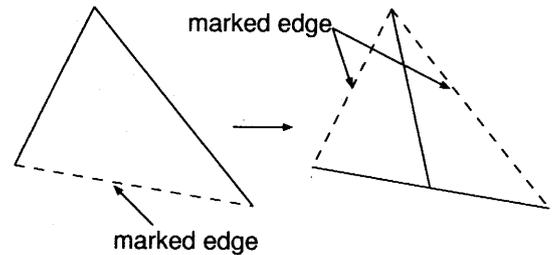


Fig.5.4 marked edge 分割法の基本分割

#### 分割の流れ

##### 1. 選択要素の処理

選択要素について基本分割を行う。

##### 2. hanging node の処理

- (1) 個数に関係なく hanging node が mark 辺以外の辺上にあるときは、まず基本分割を行って子要素を作り (子要素の mark 辺上に hanging node がある状態にする)、さらに基本分割を行う (Fig.5.5)。該当する要素がなくなるまで繰り返し行う。
- (2) hanging node が 1 個でかつ mark 辺上にある要素について、基本分割を行う。

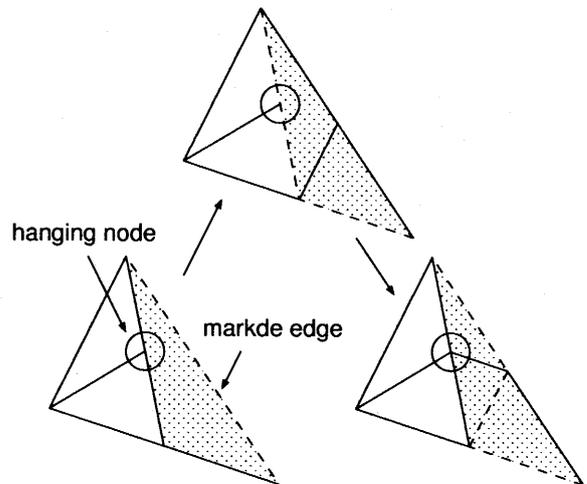


Fig.5.5 hanging node の処理 (右側の要素について)

### 5.3.5 modified quadtree 法

regular 分割法と marked edge 分割法が三角形要素を基本として考えていた方法であるのに対し、この方法は四角形領域を基本としてとらえる。quadtree 法 [6] では三角形要素と四角形要素を混在させて有限要素計算を行っていたが、本研究では四角形要素も三角形要素に分割することで領域の三角形分割を実現する modified quadtree 法として応用した。ここでは四角形領域を正方形領域として分割方法を説明する。

#### 基本分割

相対する辺の中点を結ぶことによって合同な 4 個の正方形領域に分割する。

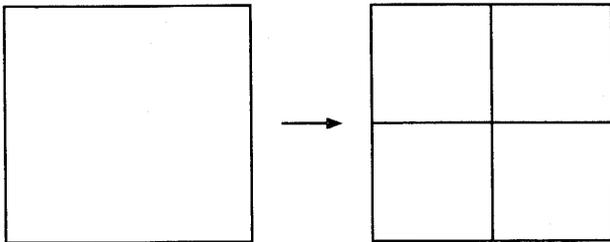


Fig.5.6 modified quadtree 法の基本分割

#### 分割の流れ

##### 1. 選択要素の処理

選択要素を含んだ正方形領域について基本分割を行う。

##### 2. 正方形領域の完成

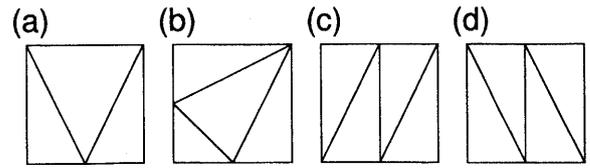
hanging node が 3 個以上または同じ辺に 2 個以上ある正方形領域について基本分割を行う (新たに hanging node が発生する可能性がある)。該当する正方形領域がなくなるまで繰り返し行う。

##### 3. 三角形分割の完成

(1) hanging node が 1 個または 2 個の正方形領域については、正方形領域を三角形要素に分割する際の工夫によって処理する (Fig.5.7)。

(2) hanging node を持たない正方形領域について、対角線を引くことによって 2 個の三角形要素に分割する (Fig.5.8)。

この方法は選択要素を含む正方形領域を 4 分割するので細分化ステップ数が少くなると同時に、生成する三角形要素の形が決まっているので三角形分割の最小角の大きさは保存される。



- (a) hanging node が 1 個
- (b) hanging node が隣り合う 2 辺に 2 個
- (c) hanging node が向かい合う 2 辺に 2 個 その 1
- (d) hanging node が向かい合う 2 辺に 2 個 その 2

Fig.5.7 hanging node を持つ場合の三角形分割

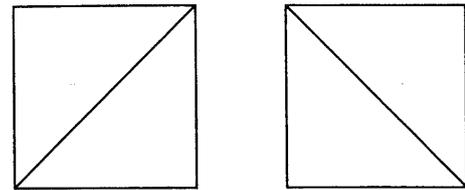
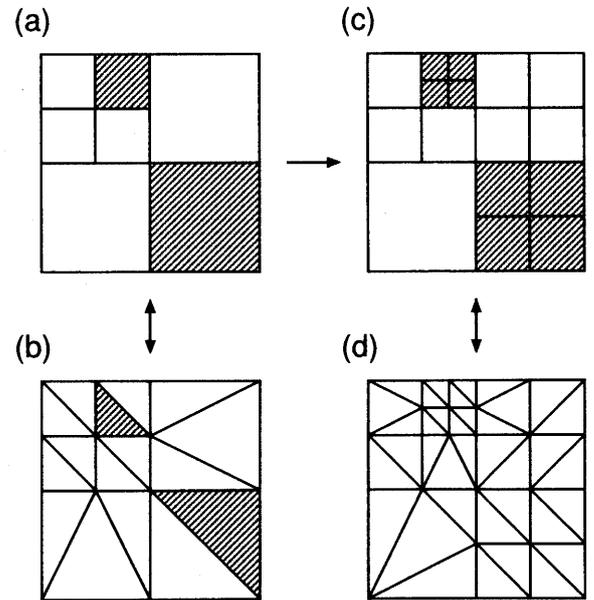


Fig.5.8 hanging node を持たない場合の三角形分割

要素分割を 1 ステップ進ませた例を次の Fig.5.9 に示す。



- (a) 正方領域 (斜線部が選択要素を含む領域)
- (b) (a) に対応する三角形分割 (斜線部が選択要素)
- (c) 選択要素を考慮し、(a) より 1 ステップ進ませた正方形領域
- (d) (c) より作成された三角形分割

Fig.5.9 quadtree 法の要素分割例

## 6 数値実験の結果

次のような厳密解を持つ問題について数値実験を行った。

1. 正方形領域における鋭いピークを持つ問題
2. 正方形領域における直線型段差を持つ問題
3. 正方形領域における曲線型段差を持つ問題

初期メッシュを Fig.6.1 のようにとる。問題データを Table 6.1 - 6.3 に示す。また, Fig.6.2, Fig.6.7 および Fig.6.12 は各問題の厳密解を示している。regular 分割法, marked edge 分割法および modified quadtree 法について, 節点数の増加による誤差の変化を見るために, 節点数と正規化された  $H^1$ -ノルム誤差  $\|u - u_h\|_{1,2;\Omega} / \|u\|_{1,2;\Omega}$  の関係の両対数グラフを Fig.6.3, Fig.6.8 および Fig.6.13 に示し, 一様メッシュ(uniform)での結果もあわせて表しておいた。また, 各要素分割法ごとに作成された節点数 1000 前後の三角形分割を Fig.6.4 - 6.6, Fig.6.9 - 6.11 および Fig.6.14 - 6.16 に示す。同時に, 三角形分割のデータとしてメッシュ作成ステップ数, 要素数, 節点数, 最小角の大きさを各三角形分割図の下に記しておく。なお, (5.1) 式における  $K$  の値は 0.5 とした [1,2]。

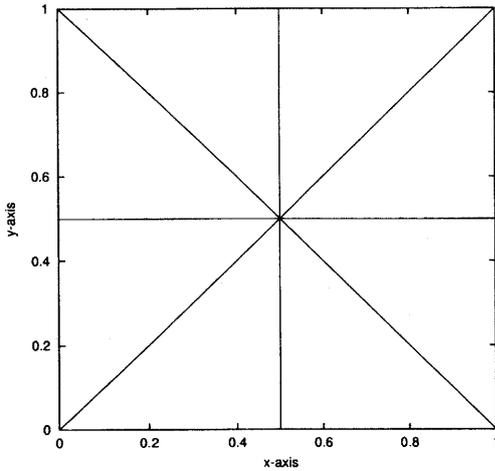


Fig.6.1 初期メッシュ

### 6.1 問題1 正方形領域における鋭いピークを持つ問題

$\Omega$	unit square: $(0,1) \times (0,1)$
$\Gamma_D$	All Dirichlet
exact solution	$x(x-1)y(y-1) \times e^{(-100(x-\frac{1}{2})^2)} e^{(-100(y-\frac{1}{2})^2)}$

Table 6.1 problem data

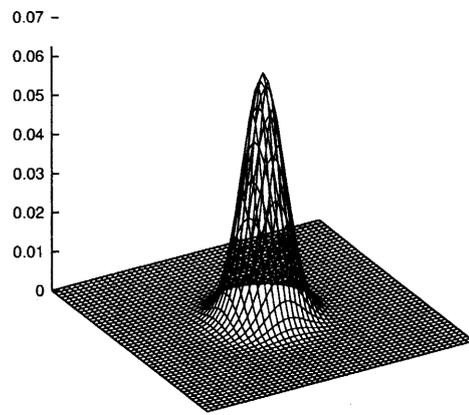


Fig.6.2 exact solution

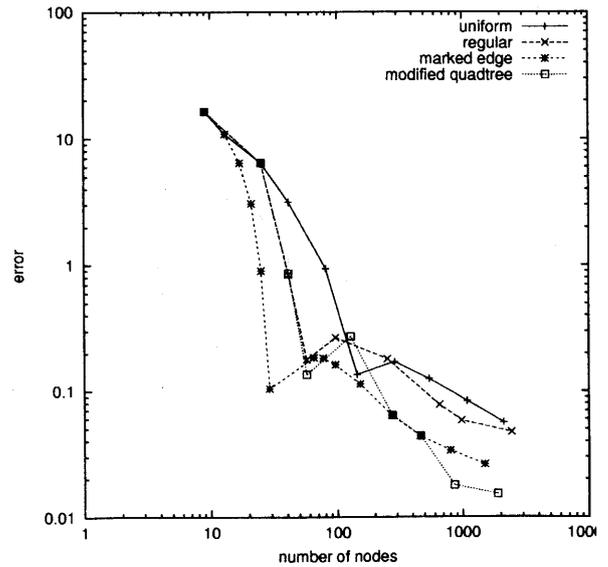
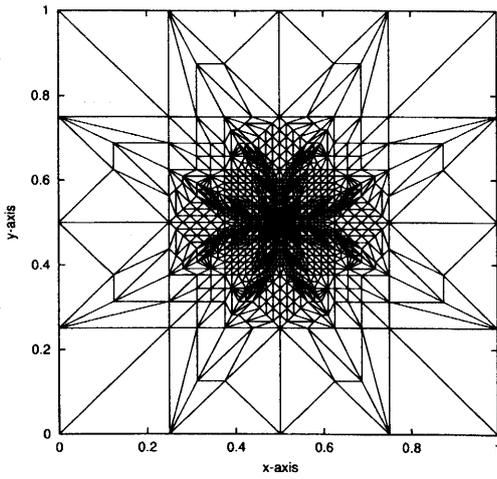


Fig.6.3  $H^1$ -ノルム誤差

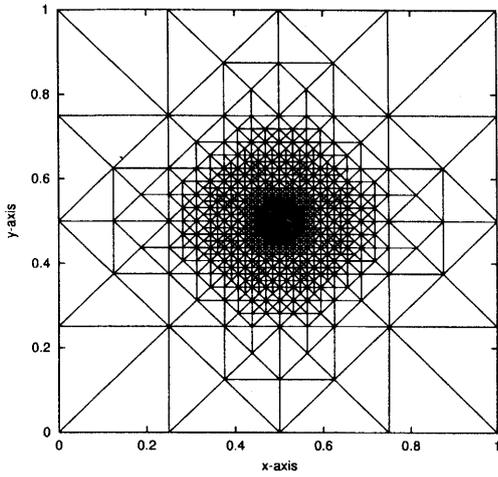
6.2 問題2 正方形領域における直線型段差を持つ問題

$\Omega$	unit square: $(0,1) \times (0,1)$
$\Gamma_D$	Left edge
$\Gamma_N$	Upper & Lower & Right edge
exact solution	$\frac{1}{2} + \frac{1/2}{\arctan(50)} \arctan(100(x - \frac{1}{2}))$

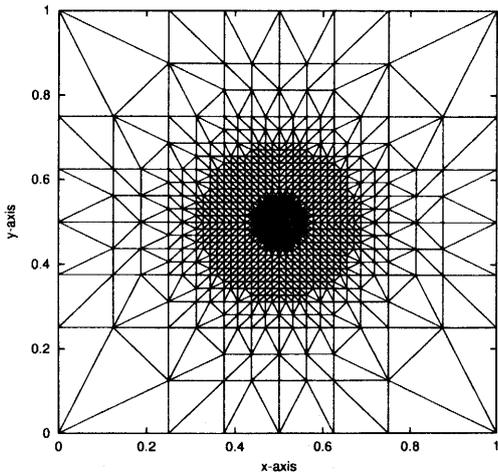
Table 6.2 problem data



7 steps, 1944 elements, 981 nodes, 7.13 degree  
Fig.6.4 regular 分割法



12 steps, 1576 elements, 797 nodes, 45 degree  
Fig.6.5 marked edge 分割法



7steps, 1688 elements, 857 nodes, 26.57 degree  
Fig.6.6 modified quadtree 法

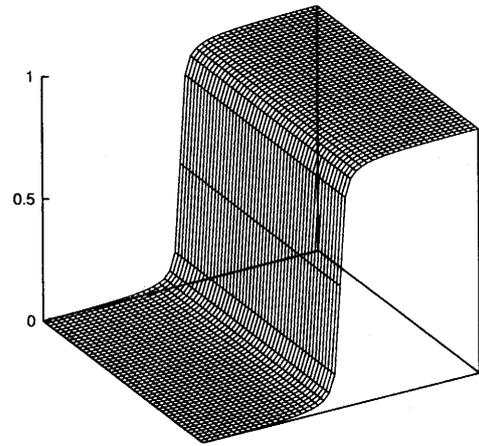


Fig.6.7 exact solution

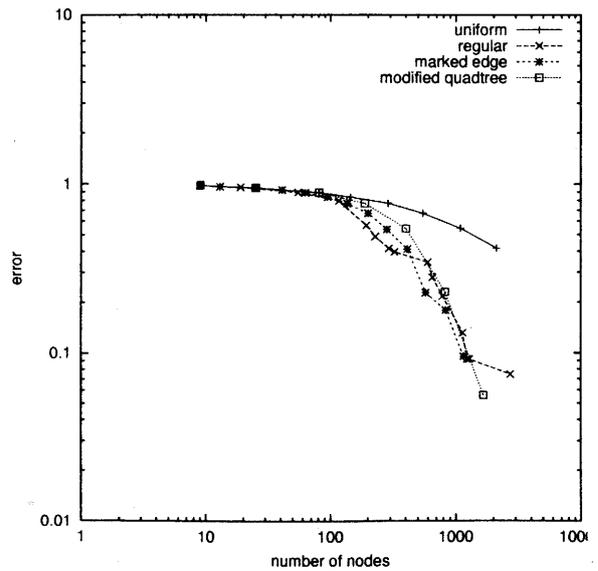
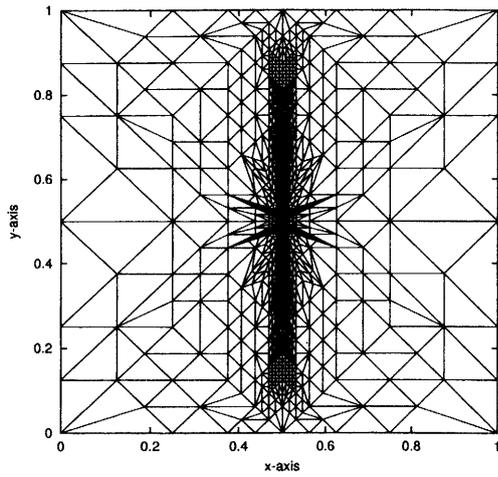
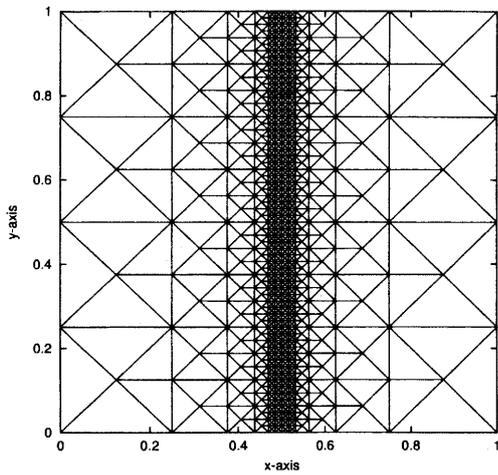


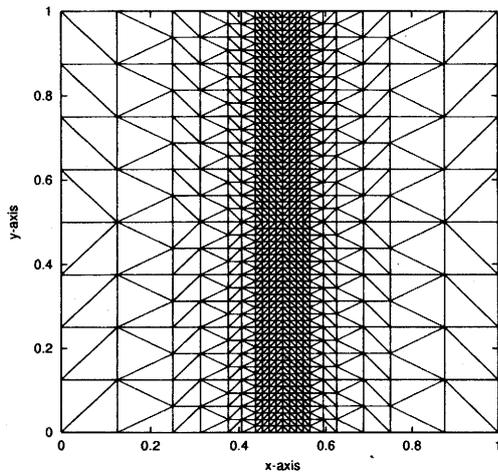
Fig.6.8  $H^1$ -ノルム誤差



11 steps, 2240 elements, 1135 nodes, 3.03 degree  
Fig.6.9 regular 分割法



11 steps, 1624 elements, 829 nodes, 45 degree  
Fig.6.10 marked edge 分割法



5 steps, 1584 elements, 821 nodes, 26.57 degree  
Fig.6.11 modified quadtree 法

### 6.3 問題3 正方形領域における曲線型段差を持つ問題

$\Omega$	unit square: $(0,1) \times (0,1)$
$\Gamma_D$	Left edge
$\Gamma_N$	Upper & Lower & Right edge
exact solution	$Y = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cos(\pi y)$ として $\begin{cases} 0 & (x < Y - 0.1) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\{5\pi(x - Y)\} & (Y - 0.1 \leq x \leq Y + 0.1) \\ 1 & (x > Y + 0.1) \end{cases}$

Table 6.3 problem data

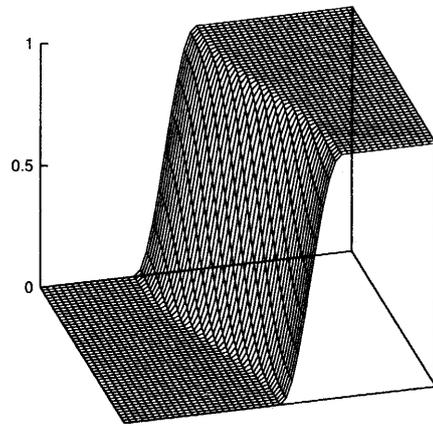


Fig.6.12 exact solution

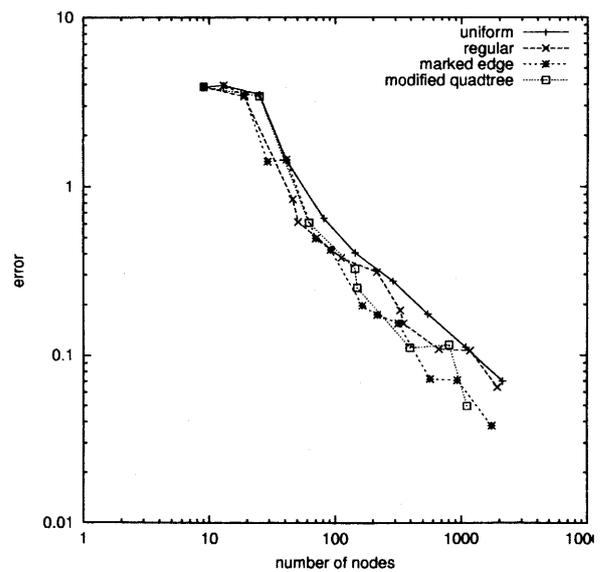
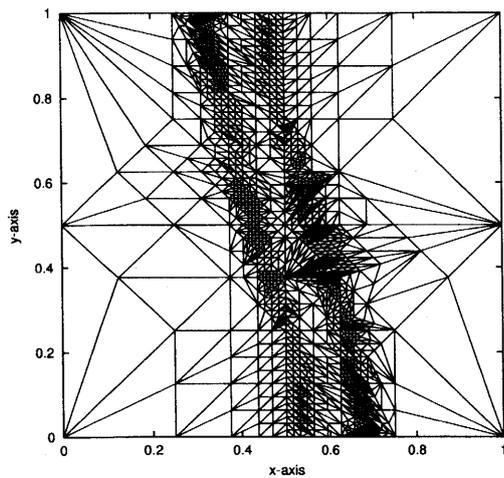
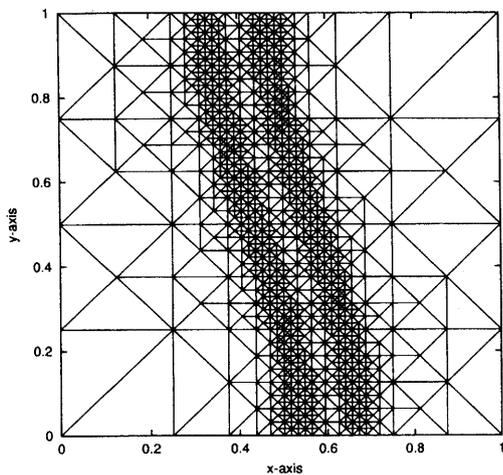


Fig.6.13  $H^1$ -ノルム誤差



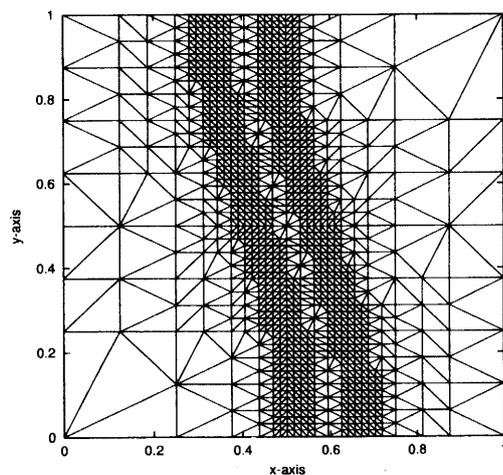
9 steps, 2322 elements, 1180 nodes, 3.69 degree

Fig.6.14 regular 分割法



11 steps, 1820 elements, 933 nodes, 45 degree

Fig.6.15 marked edge 分割法



7 steps, 2166 elements, 1113 nodes, 26.57 degree

Fig.6.16 modified quadtree 法

## 7 アダプティブ有限要素メッシュ生成法の比較

### 7.1 $H^1$ -ノルム比較

節点数 1089 における, 各要素分割法で作成されたメッシュによる  $H^1$ -ノルム誤差の相対評価を, 一様メッシュでの  $H^1$ -ノルム誤差を 1 として Table 7.1 に示す. また, 節点数 1089 の一様メッシュでの  $H^1$ -ノルム誤差の精度を実現するために必要な, 各要素分割法で作成されたメッシュの節点数を Table 7.2 に示す. 参考として, 節点数 1089 の一様メッシュを Fig.7.1 に示しておく.

問題番号 (節点数)	1(1089)	2(1089)	3(1089)
regular	0.689	0.261	0.960
marked edge	0.366	0.204	0.580
modified quadtree	0.207	0.319	0.493

Table 7.1 一様メッシュに対する  $H^1$ -ノルム誤差の相対評価

問題番号 (節点数)	1(1089)	2(1089)	3(1089)
regular	636	204	648
marked edge	227	278	450
modified quadtree	263	399	394

Table 7.2 一様メッシュの  $H^1$ -ノルム誤差精度実現に必要な節点数

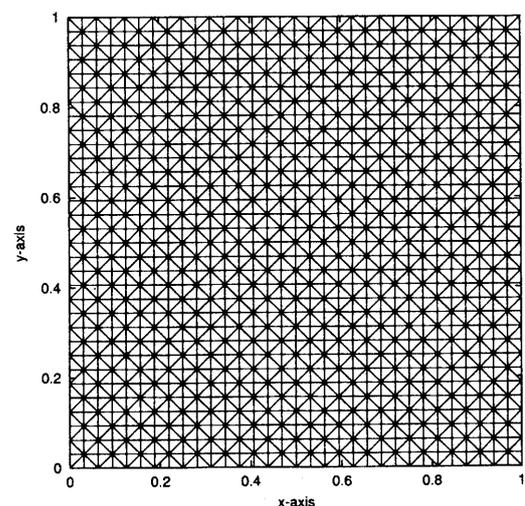


Fig.7.1 節点数 1089 の一様メッシュ

Table 7.1, Table 7.2 に挙げた通り, 具体的な値として節点数 1089 の一様メッシュを基準に考察すると, 他の要素分割法に対して解の  $H^1$ -ノルム誤差が大きい問題 1 と 3 にお

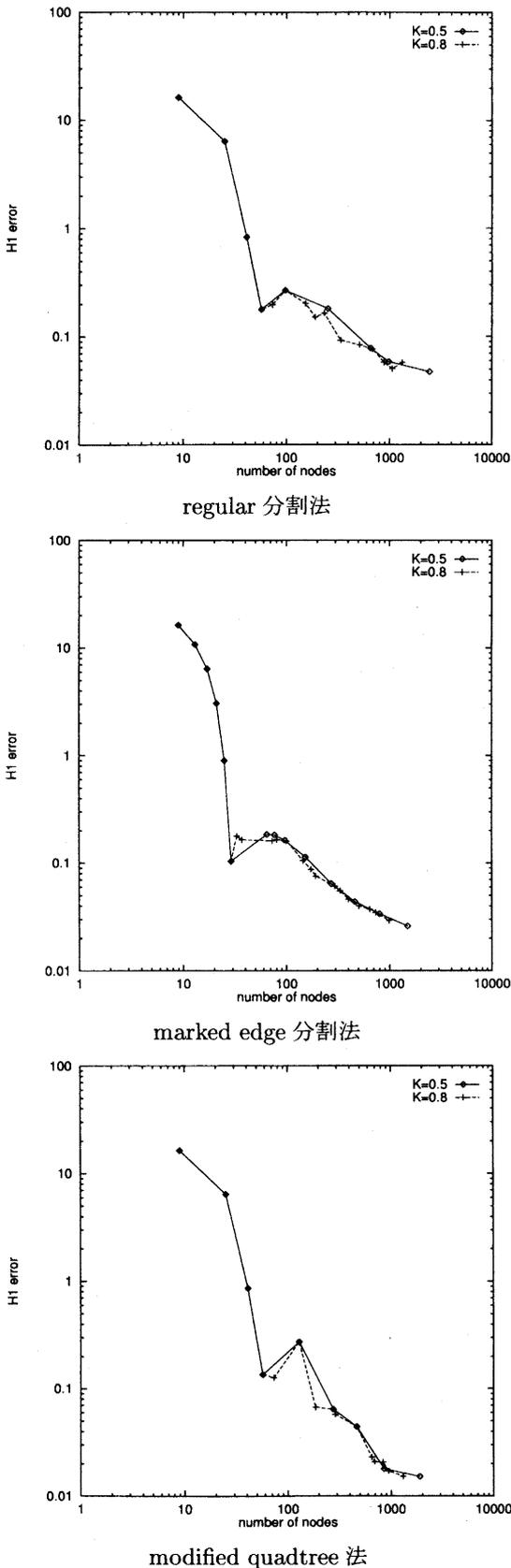


Fig.7.2  $K$  の値による  $H^1$ -ノルム誤差の比較

ける regular 分割法を除き、一様メッシュによる有限要素解の  $H^1$ -ノルム誤差を 1 としたときの各要素分割法により作成された三角形分割による有限要素解の  $H^1$ -ノルム誤差は, Table 7.1 より問題 1 と 2 で 0.204~0.366, 問題 3 でも 0.493~0.580 となっている. 同様に問題 1 と 3 における regular 分割法を除くと, Table 7.2 の節点数の評価から一様メッシュの節点数に対し問題 1 と 3 では 19%~37%, 問題 3 でも 36%~41%の節点数で一様メッシュと同じ大きさまで  $H^1$ -ノルムの誤差が抑えられている. これらの点から, 本研究で取り上げた事後誤差評価によるアダプティブ有限要素法の有効性が確認できた.

また, 細分化ステップの増加に対し  $H^1$ -ノルム誤差が一様に小さくなっていくことが望ましいが, 問題 1(Fig.6.3) のように  $H^1$ -ノルム誤差の大きさが振動する場合もある. このような現象が起こるのは細分化 1 ステップにおいて選択要素の数が多くなりすぎるのが原因ではないかと考え, 選択要素の数を抑えるために (5.1) 式における  $K$  の値を変えて数値実験を行い, 比較した.  $K = 0.5$  と  $K = 0.8$  について, 節点数の増加に対する  $H^1$ -ノルム誤差の推移を各要素分割法ごとに比較した結果は Fig.7.2 の通りであるが, このように  $K$  の値をより大きくしてみても, 節点数の増加に対する  $H^1$ -ノルム誤差の推移は  $K = 0.5$  の時と比べて目立った変化はなく, 期待した効果は現われなかった.

## 7.2 メッシュの整合性

各要素分割法によって作成された領域の三角形分割の見た目について考察すると, 各要素分割法とも節点が厳密解において値の変化の激しい部分に集中しており, アダプティブ有限要素メッシュの自動作成が成功していることがわかる. ただ, marked edge 分割法による三角形分割の最小角が 45 度, modified quadtree 法が 26.57 度と定まっているのに対し, regular 分割法は極端に小さい角度を持つ三角形要素が生じ, 見た目にも違和感がある.

また, あるステップでの三角形分割  $\mathcal{T}_h^k$  に対し, 定められた要素分割の作業を 1 ステップ行うことにより, 次ステップの三角形分割  $\mathcal{T}_h^{k+1}$  が得られたとすると,  $\mathcal{T}_h^k$  と  $\mathcal{T}_h^{k+1}$  の関係を  $\mathcal{T}_h^k \preceq \mathcal{T}_h^{k+1}$  と書くことにする. さらに, それぞれの三角形分割に対応して有限要素空間  $X_{hk}, X_{hk+1}$  を定義する. このとき, ある段階の三角形分割  $\mathcal{T}_h^k$  における有限要素解  $u_h$  を事後誤差評価しているので, 分割を 1 ステップ進めて  $\mathcal{T}_h^{k+1}$  を作成する際に,

$$\mathcal{T}_h^k \preceq \mathcal{T}_h^{k+1} \Rightarrow X_{hk} \subset X_{hk+1} \quad (7.1)$$

を満たさなければ有限要素解の精度が向上する保証がない

とも考えられるが、実際には満たさない modified quadtree 法でも問題なくアダプティブ有限要素法が行われている。

要素分割法の違いによるメッシュの整合性についての比較を、Table 7.3 にまとめておく。

要素分割法	最小角	(7.1) 式
regular 分割法	極めて小	満たす
marked edge 分割法	45 度	満たす
modified quadtree 法	26.57 度	満たさない

Table 7.3 メッシュの整合性

### 7.3 まとめ

各要素分割法の比較し、数値実験の結果に見られる各要素分割法の特徴をまとめておく。

**regular 分割法** 三角形分割の最小角が次第に小さくなってしまったため Remark 4.4 で述べたような、極端に小さい角度を持つ鋭角三角形が生じ、作成された三角形分割の見た目にも違和感がある。特に、問題 1 では他の要素分割法より  $H^1$ -ノルム誤差が大きい値で推移している。

**marked edge 分割法** 細分化ステップ数は多くなるが、節点数の増加に対しほぼ一様に  $H^1$ -ノルム誤差が小さくなっている。特に、どの段階の細分化ステップでの三角形分割における有限要素解を計算しても、常に一様メッシュよりも  $H^1$ -ノルム誤差が小さくなっているのは marked edge 分割法だけであり、この点でも本研究で取り上げた要素分割法の中で最も信頼のできる方法であると考えられる。

**modified quadtree 法** 細分化ステップ数が少ないことが大きな特徴であり、特に問題 2 では marked edge 分割法が 12 ステップで節点数 797 であるのに対し、modified quadtree 法では 5 ステップで節点数 857 となっている。しかし、現在のところ四角形領域以外への適用が難しく、今後更なる検討の必要があると思われる。

## 8 おわりに

本研究ではアダプティブ有限要素法における、メッシュ自動作成のためのいくつかの要素分割法について比較検討したが、とりあげた 3 つの要素分割法の中で marked edge 分割法が最も信頼できる要素分割法であると考えられる。し

かし、marked edge 分割法は要素細分化ステップ数が他の要素分割法と比べて多くなる傾向があり、各細分化ステップにおいてまず有限要素解を求めなければ事後誤差評価することができないといった、本研究のアダプティブ有限要素法において、細分化ステップ数が少ないのにもかかわらず  $H^1$ -ノルム誤差が抑えられる modified quadtree 法も魅力であり、四角形領域以外への適用を考えるなど、さらに検討していく必要があると思われる。

## 参考文献

- [1] R.Verfürth, A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques, John Wiley & Sons Ltd., 1996
- [2] R.Verfürth, A posteriori error estimators for the Stokes equations, Numer. Math., 55(1989), 309-325
- [3] E.Bänsch, Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions, IMPACT of Comput. in Sci. and Engrg. 3(1991), 181-191
- [4] D.Hempel, Local mesh adaptation in two space dimensions, IMPACT of Comput. in Sci. and Engrg. 5(1993), 309-317
- [5] W.F.Mitchell, A comparison of adaptive refinement techniques for elliptic problems, ACM Transactions of Mathematical Software, 15(1989), 326-347
- [6] N.Provatas, N.Goldenfeld, J.Dantzig, Adaptive mesh refinement computation of solidification microstructures using dynamic data structures, Journal of Computational Physics, 148(1999), 265-290
- [7] I.Babuška, A.Miller, A feedback finite element method with a posteriori error estimation: Part 1. The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 61(1987), 1-40
- [8] P.G.Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, 1978.