

一般化された円の面積と弧長について

太田晶子*・山口範和・山本浩暉†

Area and Arc length of Generalized Circles on the Plane

Akiko OHTA, Norikazu YAMAGUCHI and Hiroki YAMAMOTO

E-mail: norikazu@edu.u-toyama.ac.jp

概要. 本論文では、円の一般化として得られるある単一閉曲線を考える。その曲線によって囲まれる図形の面積及び曲線の長さを調べることが目的である。円、アステロイドといったよく知られた曲線から出発し、徐々に曲線を一般化し、その都度面積の公式を与える。最終的には4つの実パラメータによって特徴付けられる平面曲線で囲まれる図形の面積に対する表現公式を与える。弧長については、面積とは異なり特定の条件の下でしか表現公式を得られなかつた為、極限や臨界点に限定して数学的に厳密な考察を行い、数値計算によってパラメータの変化に伴う変化を様子を観察する。

キーワード. 円、平面曲線、面積、弧長

Keywords and phrases. Circle, Plane curves, Area, Arc length

1. はじめに

1.1. 本論文の目的

平面上で定義された半径 $a (> 0)$ の円とは、ある点 P からの距離が a であるような点の集合として形成される図形のことである。 P は円の中心と呼ばれる。即ち、 $P(x_0, y_0)$ とおくとき、次の集合 C が $P(x_0, y_0)$ を中心とした半径 a の円である。

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = a\}$$

半径 a の円の面積は $S_a = \pi a^2$ 、弧長（円周の長さ）は $L_a = 2\pi a$ で与えられることはよく知られている。ここで、 π は円周率と呼ばれる定数である。円周率 π は幾何学的には、円の直径 d と円周の長さ ℓ の比、あるいは半径 1 の円の面積として定められる¹。定数 π について詳しくは、竹之内・伊藤 [12]、野崎 [7]などを参照されたい。

本論文では円やアステロイド、及びそれらを一般化して得られる単一閉曲線によって囲まれる図形に対する面積の公式の導出を目指とする。更に、得られた面積公式に現れるパラメータの極限操作についても考え、パラメータの変化に伴い図形の面積という量はどのように変化をするのかを解析する。また、これらの図形に対する弧長についても考察を行う。

本論文において使用する数学的な道具は、微分積分学とベクトル解析、変分原理程度の初等的なものばかりであるが、それらについて述べた成書においても、第5節で扱うような超楕円を含む一般化された曲線によって囲まれる図形の面積や弧長について詳細に述べたものを筆者らは知らない。また、平面曲線について網羅的に取り扱われた Lockwood [4] や Lawrence [3] においても取り扱われていない²。従って、得られた事実をこのような形でまとめることにした。

* 富山大学人間発達科学部。

† 富山市立水橋中学校。

¹ π は無理数であり、その近似値が $\pi \approx 3.141592$ となることはよく知られている。また、解析的には図形的な意味合いとは全く無関係に π を定義する事が出来る。例えば、高木 [9] を参照せよ。

² 後に述べる Lamé 曲線について簡単なコメントが掲載されている程度。

1.2. 本論文の構成

本論文の構成について述べる。第2節において、本論文で用いる数学的な道具の準備を行う。但し、証明などは必要最小限にとどめた。第3節ではアステロイドと呼ばれる曲線を一般化することで得られる一般化アステロイドとそれによって囲まれる図形の面積について論じる。第3節で論じる単一閉曲線 C_n は主に離散的なパラメータ $n \in \mathbb{N}$ によって特徴付けられる。Green の定理を用いる部分を除けば、大学1年生程度の微分積分学の知識だけを用いて曲線の面積 S_n に対する公式の導出、及びその極限操作について議論が出来る。第4節で扱う単一閉曲線 C_α は円やアステロイドを含むように一般化したもので、本質的には1つの実パラメータ $\alpha > 0 (\alpha \in \mathbb{R})$ により特徴付けられる。 xy 平面上で半径 a の円に外接する正方形を含む閉曲線の面積をパラメータに応じて求める。 C_α によって囲まれる図形の面積 S_α を表現する為に Euler のガンマ関数を用いる。第5節では橙円に対する一般化として知られている超橙円を含む更なる一般化について取り扱う。扱う曲線 $C_{\alpha,\beta}$ は曲線の形状を決定する4つの実パラメータ $\alpha, \beta, a, b > 0 (\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R})$ の計4つの実パラメータによって特徴付けられる。 α, β, a, b に応じた面積の表現公式を導くことが目標である。ここでも Euler のガンマ関数を用いる。第6節では第4節で導入する曲線 C_α の弧長について議論する。弧長については残念ながら面積とは異なり陽な表現公式は得られない。そこで、 $\alpha \rightarrow +\infty, \alpha \rightarrow +0$ での極限や弧長の最小値を与える α についてのみ解析的に扱う。 α の変化に伴う弧長の変化の様子については数値的に取り扱う。

2. 準備

2.1. Green の定理とその応用

xy 平面上の単一閉曲線によって囲まれる図形の面積を求積する方法には様々な方法がある。例えば、定積分を用いる方法がその代表例と言えよう。別の方針としては、Green の定理を用いて領域積分を線積分に直して計算する方法がある（補題2.1 参照）^{*3}。この方法の利点は、計算が比較的容易であること、曲線を陽関数として表現する必要がないこと、等が挙げられる。例えば、円を例にとれば、定積分を用いる場合は円の面積 S を求めるために、 $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ のように、曲線を x （または y ）の関数として陽に表現しなければならないが、以下の補題2.1を用いる方法では陽関数として表現し直す必要はない。

Green の定理を用いて計算を進めるには、曲線をベクトル場として表現する必要がある。 xy 平面上の円をベクトル場として表現する方法にも様々なものがあるが、もっとも簡単な方法は極座標を用いる方法であろう。曲線 C をベクトル場:

$$C : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

によって定まる曲線とすると、これは xy 平面上を正の向きに一周する単位円を与える^{*4}。言うまでもないことであるが、これは単一閉曲線である。実際、任意の $t, s \in (0, 2\pi)$ に対して、 $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{r}(s)$ であり、なおかつ $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$ である事から、これは確認できる。

次の補題が本論文での鍵である。

補題2.1. C を xy 平面上を正の向きに周る単一閉曲線とするとき、曲線 C によって囲まれた図形 D の面積 S は、以下の C に沿った線積分で与えられる。

$$S = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx) \tag{2.1}$$

この補題は Green の定理から従う。Green の定理の証明については割愛する。

定理2.2 (Green の定理). $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな単一閉曲線 C で囲まれた有界閉領域とする。 D 上定義された C^1 級関数 $F(x, y), G(x, y)$ に対して、次が成立する。

$$\iint_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (F dx + G dy) \tag{2.2}$$

^{*3} この方法は空間1次元における定積分の計算を原始関数の端点での値の差に直すことの2次元版と考えることが出来る。

^{*4} ここで言う正の向きとは、領域内部を左側に見て一周するという事であり、簡単に言えば、反時計回り。

Green の定理を用いて、補題 2.1 を示そう。

補題 2.1 の証明. 領域 D の面積 S は、次によって与えられる事は明らかである。

$$S = \iint_D dx dy$$

Green の定理を用いて、(2.1) の右辺を書きなおせば

$$\frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy$$

となるので、これは S に他ならない。よって、補題 2.1 が示された。□

2.2. Euler のガンマ関数

第 4 節、第 5 節では得られる面積の公式を Euler のガンマ関数と呼ばれる関数を用いて表現する。ここでは、Artin [1]、高木 [9] に従って Euler のガンマ関数とベータ関数について述べる。

次の関数 $\Gamma(s)$ を Euler の**ガンマ関数**といい、

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} ds \quad (s > 0) \quad (2.3)$$

次の関数 $B(p, q)$ を Euler の**ベータ関数**といい。

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0) \quad (2.4)$$

ガンマ関数とベータ関数について、本論文で必要となる諸性質を定理の形で述べておこう。より詳しい性質は、上に挙げた文献や岩波の数学公式集 [8] を参照せよ。

定理 2.3 ($\Gamma(s)$, $B(p, q)$ の性質)。

(i) $\Gamma(1)$ および $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ の値は、次で与えられる。

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (2.5)$$

(ii) $s > 0$ に対して次が成り立つ。

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (2.6)$$

(iii) ガンマ関数とベータ関数の間には次の関係が成立する。

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (2.7)$$

(iv) $s = n + 1/2$ ($n \in \mathbb{N}_0$) のとき、次が成立する。

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \quad (2.8)$$

(v) $s > 0$ に対して、次が成立する（倍数公式）。

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) \quad (2.9)$$

注意 2.1. 性質 (ii) から、ガンマ関数 $\Gamma(s)$ は階乗の一般化であることがわかる。実際、(ii) で $s = n$ とすると $\Gamma(n+1) = n!$ を得る。

3. 一般化アステロイドとその面積

本節ではアステロイドと呼ばれる曲線の一般化と一般化された曲線によって囲まれる図形の面積について考える。

3.1. アステロイド

次の曲線 C をアステロイド（または星芒形）という。

$$C : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (3.1)$$

ここで, $a > 0$ である. C は xy 平面上の单一閉曲線を与える. アステロイドの形状は図 3.1 のようになる. アステロイドの面積については $S = \frac{3\pi a^2}{8}$ となることが知られている^{*5}.

本節では, アステロイドの一般化を与え, それによって囲まれる図形の面積を求める.

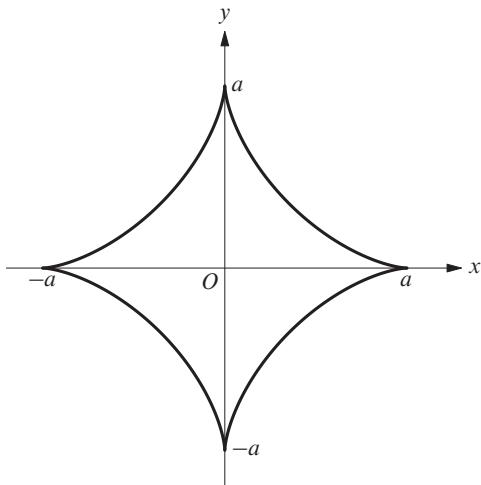


図 3.1. アステロイド

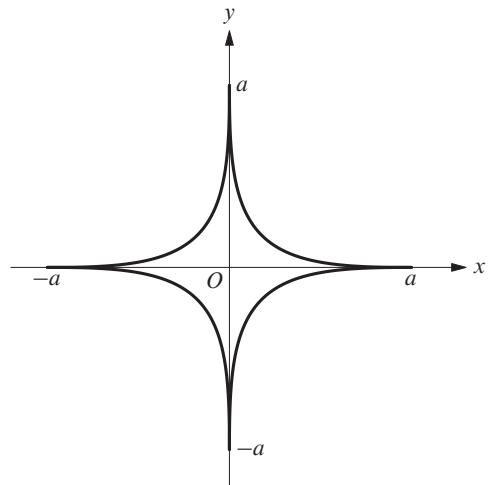


図 3.2. 一般化アステロイド ($n = 2$)

3.2. 一般化アステロイドとその面積

$n \geq 0$ を整数として, 次の曲線 C_n を考える.

$$C_n : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (a \cos^{2n+1} t, a \sin^{2n+1} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (3.2)$$

但し, $a > 0$ とする.

$n = 1$ のとき, 即ち C_1 がちょうどアステロイドとなるので, C_n で定まる曲線はアステロイドの一般化と考えることが出来る. 例えは, $n = 2$ のとき, C_2 は図 3.2 のような单一閉曲線となる. そこで以下では, C_n で定まる单一閉曲線を一般化アステロイドと呼ぶことにしよう. なお, C_0 は原点を中心とする半径 a の円である.

本節における最初の目標は一般化アステロイド (3.2) によって囲まれる図形の面積 S_n を求めることである. 言い換えれば, S_n をパラメータ n によって表示する, ということである. その為に, まずは補題 2.1 を用いて, 一般化アステロイドの面積を C_n に沿った線積分で表示し, 線積分を定積分に書き直そう.

$x = x(t) = a \cos^{2n+1} t, y = y(t) = a \sin^{2n+1} t$ とおく ($0 \leq t \leq 2\pi$). このとき,

$$dx = -a(2n+1) \cos^{2n} t \sin t dt, \quad dy = a(2n+1) \sin^{2n} t \cos t dt$$

であるから, 補題 2.1 より曲線 C_n で囲まれる図形の面積 S_n は次をみたす.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \oint_{C_n} (x dy - y dx) = \frac{(2n+1)a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} t \sin^{2n} t dt \\ &= \frac{(2n+1)a^2}{2^{2n+1}} \int_0^{2\pi} \sin^{2n} 2t dt = \frac{(2n+1)a^2}{2^{2n+2}} \int_0^{4\pi} \sin^{2n} s ds. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで, $2 \sin t \cos t = \sin 2t$ であることと, $s = 2t$ なる変数変換を用いた.

^{*5} 以下に示す計算で $n = 1$ とすれば, 実際にこの公式を得る.

S_n の表現を得るには, (3.3) における次の定積分の表現が得られればよい.

$$J_n := \int_0^{4\pi} \sin^{2n} s \, ds.$$

そこで, J_n を n を用いて表そう. 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{4\pi} \sin^{2n-1} s \cdot \frac{d}{ds}(-\cos s) \, ds \\ &= \left[\sin^{2n-1} s (-\cos s) \right]_{s=0}^{s=4\pi} + (2n-1) \int_0^{4\pi} \cos^2 s \cdot \sin^{2n-2} s \, ds \\ &= (2n-1) \int_0^{4\pi} (\sin^{2n-2} s - \sin^{2n} s) \, ds = (2n-1)J_{n-1} - (2n-1)J_n \end{aligned}$$

となる. これを J_n について解けば, 次の漸化式が得られる.

$$J_n = \frac{2n-1}{2n} J_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

この漸化式を繰り返し用いれば, $J_0 = 4\pi$ に注意して

$$J_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2} J_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 4\pi \quad (3.4)$$

が得られる. ここで, $(2n-1)!! = \prod_{j=1}^n (2j-1)$, $(2n)!! = \prod_{j=1}^n 2j$ である. 従って (3.3), (3.4) より, S_n の表示として次を得る.

$$S_n = \frac{(2n+1)a^2}{2^{2n+2}} J_n = \frac{(2n+1)a^2}{2^{2n+2}} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 4\pi = \frac{(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^2} \pi a^2$$

得られた事実を定理としてまとめよう.

定理 3.1 (一般化アステロイドの面積). 一般化アステロイド (3.2) によって囲まれる図形の面積 S_n は, 以下で与えられる.

$$S_n = \frac{(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^2} \pi a^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

注意 3.1. (3.5)において, $n = 0$ とすると $S_0 = \pi a^2$ となり, 半径 a の円の面積に一致する. また, $n = 1$ とすると $S_1 = \frac{3\pi a^2}{8}$ となり, アステロイドの面積に一致する.

3.3. S_n の極限値

得られた S_n について, $n \rightarrow \infty$ での振る舞いを調べよう. 直感的には n を大きくすれば, C_n で囲まれる図形は次第に菱んでいくので, S_n は n の増加に伴い小さくなっていく事が期待される. これを確かめよう.

まず, 任意の $n \geq 0$ に対して, $S_n > 0$ は (3.5) の表現から明らかである. また, S_{n+1} と S_n の比は

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= \frac{(2n+3)!\pi a^2}{2^{4(n+1)}((n+1)!)^2} \Big/ \frac{(2n+1)!\pi a^2}{2^{4n}(n!)^2} = \frac{(2n+3)(2n+2)}{16(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{8} \frac{2n+3}{n+1} < \frac{1}{8} \frac{3n+3}{n+1} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

と評価される. 従って, S_n は単調減少数列である. よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ が従う. 実際, 上の不等式から

$$S_{n+1} < \frac{3}{8} S_n$$

であり, この不等式を繰り返し用いれば

$$S_n < \left(\frac{3}{8}\right)^n S_0 = \left(\frac{3}{8}\right)^n \pi a^2$$

を得る. よって $S_n > 0$ に注意して $n \rightarrow +\infty$ とすれば挟み撃ちの定理によって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ が得られる. 別の方法としては, Wallis の公式を用いる方法も考えられる. Wallis の公式とは

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}. \quad (3.6)$$

という関係式の事である (例えば, 高木 [9] を参照せよ) . さて, S_n を Wallis の公式が現れるように無理やり書き直すと,

$$S_n = \frac{(2n+1)\pi a^2}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n+1)\pi a^2}{2^{2n}\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

となるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2^{2n}\sqrt{n}} = 0$$

に注意すれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ が従う. また, Wallis の公式 (3.6) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)\pi a^2}{n} \frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = 2\pi a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi}a^2 \quad (3.7)$$

などもわかる. これは n の増加に伴い減少する S_n に対して, $\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$ のオーダーで増大するものを掛ければ一定の極限値へ収束するという事である. 人工的ではあるが, (3.2) における a を n に依存するようにして, $2^n n^{-\frac{1}{4}}$ と同じ増大度を持つようなもので引き伸ばし続ければ, 閉曲線によって囲まれる図形の面積は, $n \rightarrow \infty$ としても 0 にはならずに一定の値に収束する事がわかる.

4. 円の一般化とその面積

第3節において, 我々はアステロイドを一般化した曲線 C_n について考察し, その面積 S_n の表現を n に応じてを求めた. (3.2) では曲線 C_n を $\cos t$ や $\sin t$ の奇数次のベキによって定めたのだが, これには理由がある. 例えば, $\cos^{2n} t$ や $\sin^{2n} t$ のような偶数次のベキの場合を安易に考えると, $\cos^{2n} t \geq 0, \sin^{2n} t \geq 0$ であるから, 得られる曲線は xy 平面上の第1象限以外のところを動かず, 得られる曲線は xy 平面上の単一閉曲線とはならない. 従って, これでは円やアステロイドの一般化と見做すことは出来ないのである. また, 同様の理由から非整数ベキの場合も扱っていない.

本節では, (3.2) を非負の非整数ベキの場合へ拡張し, その曲線によって囲まれる図形の面積の公式を与える. また, 前節と同様に α に関する極限操作についても考察を行う.

4.1. 一般化された円

実数 $\alpha > 0$ に対して, 次のような曲線 C_α を考えよう.

$$C_\alpha : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = \left(a |\cos t|^\alpha \frac{\cos t}{|\cos t|}, a |\sin t|^\alpha \frac{\sin t}{|\sin t|} \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (4.1)$$

ここでも $a > 0$ とする.

(4.1) は (3.2) の更なる一般化である. 実際, $\alpha = 1$ の場合は円のベクトル表示に一致し, $\alpha = 3$ の場合がアステロイドに一致する. 更に $\alpha = 2n+1$ ($n \in \mathbb{N}_0$) とすれば, これは前節で考察した C_n に他ならない. (4.1) は非負の実数全体に対して定義されている事から, (3.2) の更なる一般化と呼ぶに相応しい事がわかるだろう. (4.1) は, xy 平面上の単一閉曲線を与える. 即ち, 上で述べたような問題は起こらない.

単一閉曲線 C_α によって囲まれた図形を D_α とおき, その面積を S_α と書く. 我々の目標は S_α を α の関数として表現する事である.

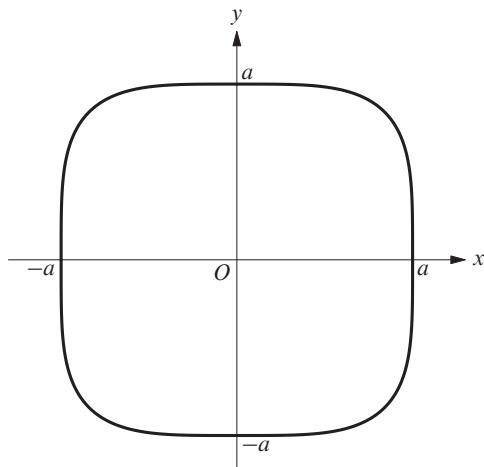
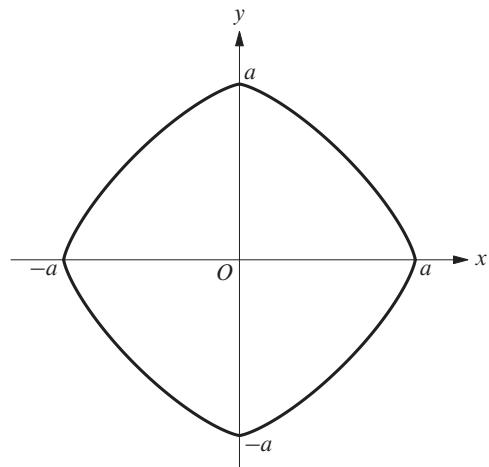
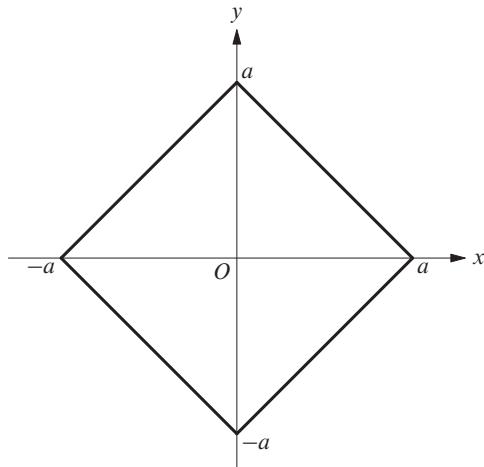
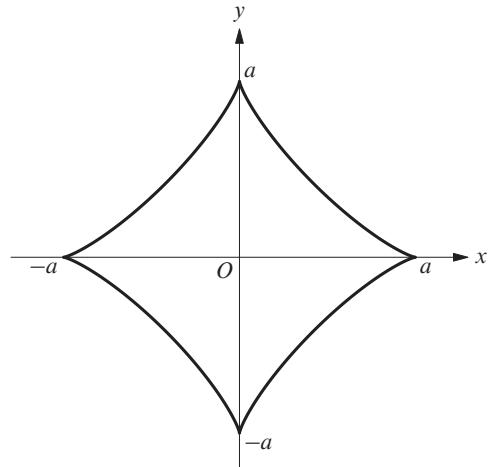
注意 4.1. (4.1) は $\operatorname{sgn} \cos t = \frac{\cos t}{|\cos t|}, \operatorname{sgn} \sin t = \frac{\sin t}{|\sin t|}$ のような符号関数を導入し,

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (a |\cos t|^\alpha \operatorname{sgn} \cos t, a |\sin t|^\alpha \operatorname{sgn} \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

と定めたものに他ならない。即ち、(4.1) では、動径方向の変化を $a|\cos t|^\alpha, a|\sin t|^\alpha$ へ押し付け、符号関数を用いて原点の周りを一周するような单一閉曲線を作っている。

(4.1) で定義した曲線 C_α は本質的には 1 つのパラメータ α によって特徴付けられる。 $a > 0$ は、面積の大きさや曲線の長さには影響を与えるが、曲線の形状そのものには本質的な影響を持たない。

C_α の形状については、 $\alpha = 2$ の場合がある意味で臨界である。即ち、 $\alpha = 2$ を境にして C_α の形状には質的な変化が生じる。図 4.1、図 4.2、図 4.4 からもわかるように、 $\alpha > 2$ の場合はアステロイドの一般化と見做すことが出来、 $\alpha < 2$ の場合は円の一般化と捉えることが出来る。特に $0 < \alpha < 1$ の場合は、円よりも膨張した図形が得られる。 $\alpha = 2$ の場合は C_α の形状は図 4.3 のようになる。これは半径 a の円に内接する正方形である。

図 4.1. $\alpha = 1/2$ の場合図 4.2. $\alpha = 3/2$ の場合図 4.3. $\alpha = 2$ の場合図 4.4. $\alpha = 5/2$ の場合

この質的な変化について精確に述べよう。その為に、次の用語を導入する。

定義 4.1 (凸領域). $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を平面上の領域とする。任意の $x, y \in \Omega$ に対して、 $(1 - \theta)x + \theta y \in \Omega$ ($0 < \theta < 1$) が成り立つとき、 Ω は**凸領域 (convex domain)** であるという。

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ が凸領域であるとは、言い換えれば Ω 内の任意の二点間を結ぶ線分が Ω に含まれる、ということである。

さて、領域の凸性という概念を導入すると D_α の質的な変化を、図形の凸性の変化として捉えることが出来る。即ち、 $\alpha = 2$ を境に、図形の凸性に変化が生じる。 $\alpha < 2$ の場合は D_α は凸領域である。 $\alpha = 2$ の場合は正方形に一致し、この場合も図形は凸であるが、 $\alpha > 2$ では凸でない。 $\alpha = 2$ を境にして D_α の凸性が変化するので、 $\alpha = 2$ が臨界値であるという表現は適切であろう。実際、 $\alpha = 2$ を境にした質的な変化は C_α の弧長において重要な意味を持つ。これについては、第 6 節で論じる。

以下では、すべての $\alpha > 0$ について (4.1) を一般化された円と呼ぶことにする。

4.2. D_α の面積

本節における我々の目標は、(4.1) で定めた曲線 C_α によって囲まれた図形の面積 S_α に対する表現公式を与えることであった。 α が整数の場合については、第 3 節と殆んど同様の計算によって面積公式を得ることが出来る。問題は、 α が非整数の場合であり、特に $0 < \alpha < 1$ については被積分関数が $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で特異点を持つため、積分は特異積分となる⁶。

S_α の表示を求める基本的な方法は、前節と同様に補題 2.1 を用いるものであるが、図形の対称性を利用して計算を簡単にしよう。 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、

$$C_\alpha^1 : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (a \cos^\alpha t, a \sin^\alpha t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.2)$$

とおき、更に C^0, C^2 をそれぞれ

$$\begin{aligned} C^0 : \mathbf{r}(t) &= (t, 0), \quad 0 \leq t \leq a, \\ -C^2 : \mathbf{r}(t) &= (0, t), \quad 0 \leq t \leq a \end{aligned}$$

とおく。このとき、 $C_\alpha^+ = C^0 + C_\alpha^1 + C^2$ は xy 平面上の单一閉曲線となる（図 4.5 参照）。

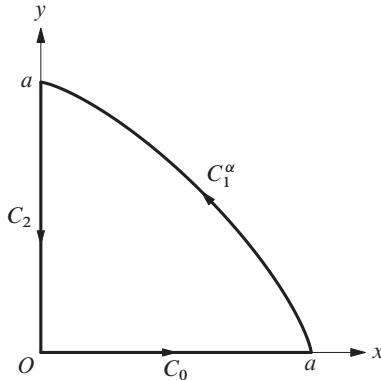


図 4.5. 積分路 C_α^+ の模式図

また、図形の対称性から、 D_α の面積は、单一閉曲線 C_α^+ によって囲まれる図形の面積の 4 倍に等しい。そこで補題 2.1 を用いて、 C_α^+ によって囲まれる図形の面積を計算すると、 C^0, C^2 上の積分は共に 0 となることが容易にわかるので、結局、前と同様の計算から

$$S_\alpha = 4 \cdot \frac{1}{2} \oint_{C_\alpha^+} (x dy - y dx) = a^2 \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \int_0^\pi \sin^{\alpha-1} t dt \quad (4.3)$$

を得る。 S_α の表示を得るには、(4.3) に現れた定積分を α に応じて表現出来ればよい。定積分の性質を用いて

$$J_\alpha := \int_0^\pi \sin^{\alpha-1} t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^{\alpha-1} t dt$$

*6 後の計算からわかるが、 $\sin t$ の負ベキが登場する為。

と書き直し、更に第2項の積分に於いては、 $t = \pi - s$ と変数変換すると、

$$J_\alpha = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} t \, dt \quad (4.4)$$

を得る。ここで、定積分の値は積分変数とは無関係であることを用いた。

(4.4) の定積分を α によって表現する為に、Euler のガンマ関数を用いる。(4.4) で、 $\cos^2 t = y$ と変数変換すると、 $-2 \sin t \cos t \, dt = dy$, $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - y}$, 積分区間は $[0, \frac{\pi}{2}]$ から $[1, 0]$ へうつるので、

$$\begin{aligned} J_\alpha &= - \int_1^0 (1-y)^{\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \, dy = \int_0^1 (1-y)^{\frac{\alpha}{2}-1} y^{\frac{1}{2}-1} \, dy \\ &= B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \end{aligned}$$

を得る。最後の部分ではガンマ関数とベータ関数の関係式 (2.7) を用いた。

(4.3), (2.5) より S_α の表示として次を得た。

定理 4.2. (4.1) で定まる单一閉曲線 C_α によって囲まれる図形の面積 S_α は、次で与えられる。

$$S_\alpha = a^2 \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \quad (4.5)$$

注意 4.2. 実は、 $\alpha = \frac{2}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) の場合は、 S_α は超橿円と呼ばれるものの特別な場合である。超橿円の面積の公式についてはよく知られており、やはりガンマ関数を用いて表現されているが、(4.5) とは見かけ上表示が異なる。詳しくは第5節で論ずる。

得られた公式がこれまでの場合、即ち一般化アステロイドを含んでいるかどうかを確認しよう。 $\alpha = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}_0$) とおくと、

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= a^2 (2n+1) \frac{1}{2^{2n}} \sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) / \Gamma(n+1) \\ &= a^2 (2n+1) \frac{1}{2^{2n}} \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \frac{1}{n!} = \frac{(2n+1)!}{2^{4n} (n!)^2} \pi a^2 \end{aligned}$$

となり、確かに (3.5) に一致する。次に、(4.5) で $\alpha = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$) とすれば

$$S_{2n} = a^2 (2n) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \Gamma(n) / \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = 4a^2 \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

を得る。特に $n = 1$ とすれば、半径 a の円に内接する正方形の面積に等しい事が確認される。

このように、(4.5) は円を一般化して得られる図形の面積の公式を与えていた事が確認できる。一般化アステロイドの面積の公式 (3.5) と比べると、 $\alpha > 0$ を連続的に変化させることが出来る点で優れていると言えよう。

4.3. S_α の $\alpha \rightarrow +\infty$ における極限

$\alpha \rightarrow +\infty$ における S_α の極限を考える。 α が十分に大きいところではガンマ関数は単調増加関数であることとロピタルの定理を用いれば、 $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S_\alpha = 0$ となることは簡単な計算からわかる。

ここでは、Stirling の公式を用いてどの程度のオーダーで 0 に近づくのかを詳しく見よう。Stirling の公式とは次の定理の事である（詳しくは Artin [1] を参照されたい）。

定理 4.3 (Stirling の公式)。 $s > 0$ とする。このとき、

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s} e^{\mu(s)} \quad (4.6)$$

と表現できる. ここで, $\mu(s)$ は

$$\mu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(s + n + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{s+n} \right) - 1 \right)$$

であり, ある $\theta \in (0, 1)$ を用いて $\mu(s) = \frac{\theta}{12s}$ と書けるものである.

注意 4.3. $\mu(s)$ の表現から明らかであるが, $\lim_{s \rightarrow \infty} \mu(s) = 0$ となる. 即ち, 指数関数の連続性から $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{\mu(s)} = 1$ が従う. この事実は, 以下の極限計算で用いる.

Stirling の公式を用いると

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}} e^{\mu(\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\alpha+1}{2}} e^{\mu(\frac{\alpha+1}{2})}} \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha+1}} e^{\mu(\frac{\alpha}{2})} e^{-\mu(\frac{\alpha+1}{2})} \end{aligned}$$

と書き直される. ここで, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$ に注意すれば,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\frac{\alpha}{2}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

である. また, 注意 4.3 で述べた事実から $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mu\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mu\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ なので, 以上をあわせて

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0 \quad (4.7)$$

を得る. 従って, (4.5), (4.7) とロピタルの定理より $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_\alpha = 0$ を得る.

ところで, (4.7) における 0 への近づき方は $\alpha^{-\frac{1}{2}}$ と同程度である事が上の計算からわかる. 実際, 次が従うこととは上の計算から明らかである.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt{\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \sqrt{2}$$

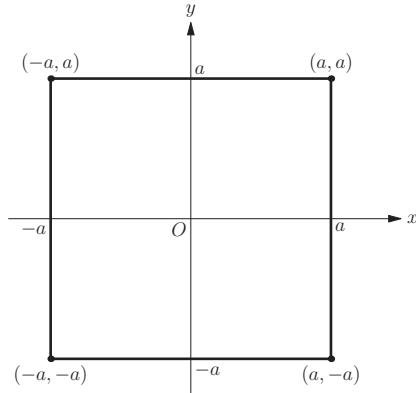
従って, 次を得る.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{2^{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}} S_\alpha = \sqrt{2\pi} a^2 \quad (4.8)$$

これは, (3.7) を連続パラメータ α に一般化した関係式である.

4.4. S_α の $\alpha \rightarrow +0$ における極限

次に, $\alpha \rightarrow +0$ の場合の極限値について考察しよう. C_α の表示 (4.1) に於いて形式的に $\alpha = 0$ とするとき, 得られる図形は $(a, a), (-a, a), (-a, -a), (a, -a)$ の 4 点を通る正方形 (図 4.6 参照) であり, その面積は $4a^2$ である.


 図 4.6. $(a, a), (-a, a), (-a, -a), (a, -a)$ を通る正方形.

$\alpha \rightarrow +0$ のとき, S_α が $4a^2$ に収束する事を示そう. (2.6) より, $\alpha > 0$ のとき

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) = \frac{\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

であるから, これを用いて (4.5) を書き直すと

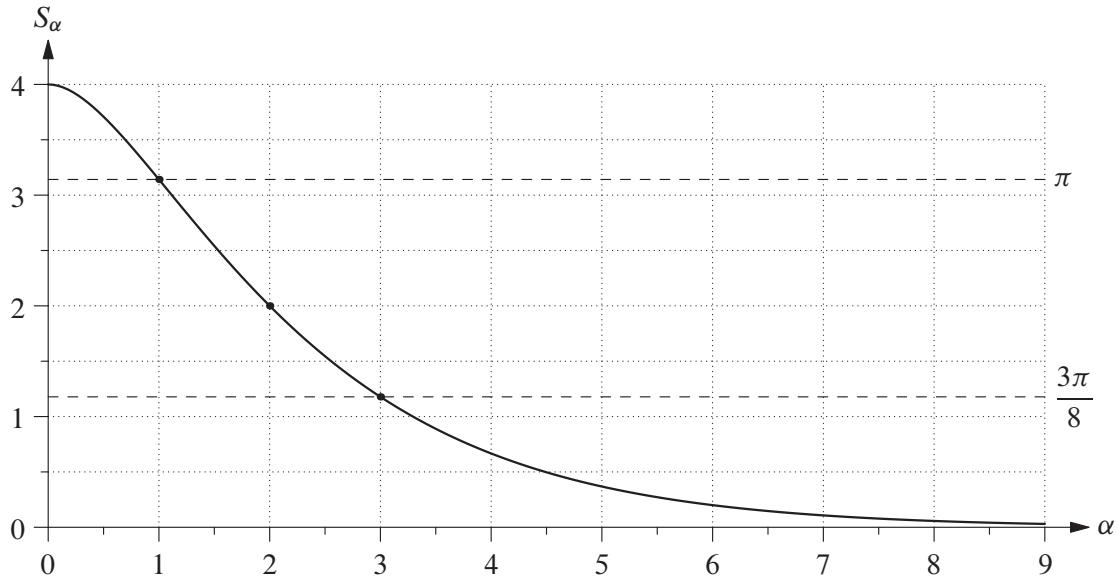
$$S_\alpha = 2a^2 \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) / \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$$

となる. ここで, $\alpha \rightarrow +0$ とすると, (2.5) より

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} S_\alpha = 2a^2 \sqrt{\pi} \frac{1}{2^{-1}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 4a^2$$

を得る. これは, 確かに上の正方形の面積に他ならない.

(4.5) に基づき, S_α ($\alpha \geq 0$) のグラフを描くと, 図 4.7 のようになる ($a = 1$ の場合).


 図 4.7. S_α のグラフ

5. 超橙円を含む更なる一般化

本節では前節までの議論を橙円やその一般化である超橙円を含むような曲線に拡張する.

5.1. 楕円及び超楕円の一般化

$\alpha > 0, \beta > 0$ に対して次の曲線 $C_{\alpha,\beta}$ を考える.

$$C_{\alpha,\beta} : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = \left(a |\cos t|^\alpha \frac{\cos t}{|\cos t|}, b |\sin t|^\beta \frac{\sin t}{|\sin t|} \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (5.1)$$

但し, $a > 0, b > 0$ とする. α, β が $\alpha = \beta = \frac{2}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) と書ける場合, $C_{\alpha,\beta}$ は超楕円 (superellipse) あるいは, Lamé 曲線^{*7} と呼ばれ, それは楕円の一般化になっている. 実際, $\alpha = \beta = 1$ の場合は

$$C_{1,1} : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (a \cos t, b \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

となり, これは確かに楕円である. 例えば, $a = 3, b = 2$ の場合に曲線 $C_{1,1}$ を描くと図 5.1 のようになる.

(5.1) で定めた曲線 $C_{\alpha,\beta}$ は超楕円を含む更なる一般化を与える. 当然, 第 3 節で考えた一般化アステロイドや第 4 節で考えた円の一般化もこれに含まれる. $b = a, \beta = \alpha$ となるように b, β を選べば, (5.1) は (4.1) を含むことがわかる.

例えば, $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = 5, a = 3, b = 2$ とすると, $C_{\frac{2}{3},5}$ は図 5.2 のような曲線となり, $\alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}, a = 3, b = 2$ とすると, $C_{\frac{2}{3},\frac{1}{3}}$ は図 5.3 のような曲線となる. 領域 $D_{\alpha,\beta}$ の凸性については, $\max(\alpha, \beta) \leq 2$ であれば凸であり, $\max(\alpha, \beta) > 2$ であれば凸でなくなる.

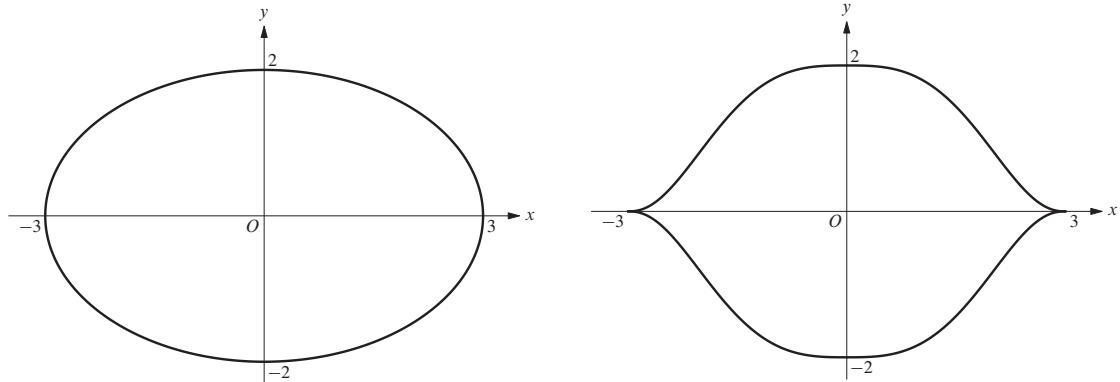


図 5.1. $C_{1,1} : a = 2, b = 3$ の場合

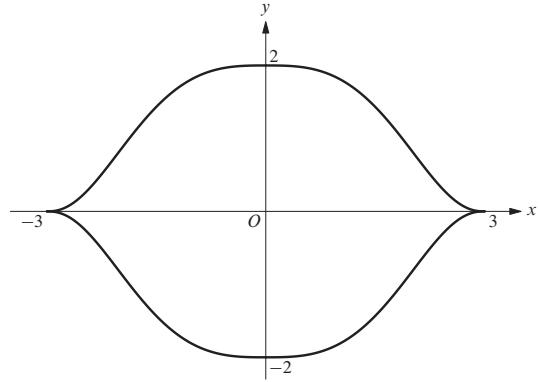


図 5.2. $C_{\frac{2}{3},5} : a = 3, b = 2$ の場合

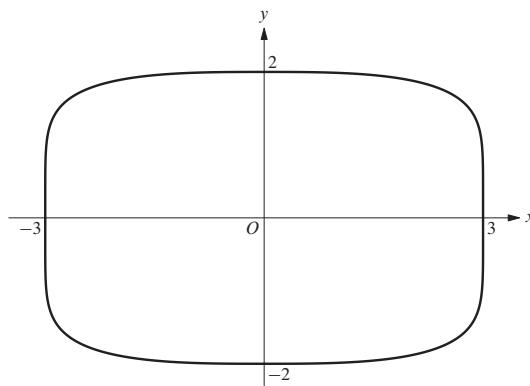


図 5.3. $C_{\frac{2}{3},\frac{1}{3}} : a = 3, b = 2$ の場合

曲線 $C_{\alpha,\beta}$ は xy 平面上の单一閉曲線であるので, $C_{\alpha,\beta}$ によって囲まれる図形の面積を $D_{\alpha,\beta}$ とおく. 以下, $D_{\alpha,\beta}$ の面積 $S_{\alpha,\beta}$ を求めよう.

^{*7} フランスの数学者 Gabriel Lamé (1795–1870) によって研究された事による. Lamé は弾性体 (elasticity) の研究等で有名.

5.2. $D_{\alpha,\beta}$ の面積

図形の対称性を利用すれば、補題 2.1 より

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta} &= 4 \times \frac{1}{2} \int_{C_{\alpha,\beta}^+} x \, dy - y \, dx \\ &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\beta \cos^{\alpha+1} t \sin^{\beta-1} t + \alpha \cos^{\alpha-1} \sin^{\beta+1} t) \, dt \end{aligned}$$

となる。ここで、積分路 $C_{\alpha,\beta}^+$ は前節で考えた C_α^+ と類似のものである。ここで、前と同様の変数変換を行うと、次が得られる。

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta} &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\beta \cos^{\alpha+1} t \sin^{\beta-1} t + \alpha \cos^{\alpha-1} \sin^{\beta+1} t) \, dt \\ &= ab \int_0^1 \beta s^{\frac{\alpha}{2}} (1-s)^{\frac{\beta}{2}-1} + \alpha s^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-s)^{\frac{\beta}{2}} \, ds \\ &= ab \left(\beta B\left(\frac{\alpha}{2} + 1, \frac{\beta}{2}\right) + \alpha B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} + 1\right) \right) \\ &= ab \left(\beta \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + 1\right)} + \alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + 1\right)} \right). \end{aligned}$$

(2.6) を用いると

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) = \frac{\alpha}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{\beta}{2} + 1\right) = \frac{\beta}{2} \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad (5.2)$$

$$\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + 1\right) = \frac{\alpha+\beta}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad (5.3)$$

となるので、 $S_{\alpha,\beta}$ を更に書き直せば、次が得られる。

定理 5.1 ($S_{\alpha,\beta}$ の面積). $S_{\alpha,\beta}$ は

$$S_{\alpha,\beta} = 2ab \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad (5.4)$$

あるいは、

$$S_{\alpha,\beta} = 4ab \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2} + 1\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + 1\right) \quad (5.5)$$

によって与えられる。

注意 5.1. ベータ関数とガンマ関数の関係 (2.7) を用いれば、(5.4) は

$$S_{\alpha,\beta} = 2ab \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$$

と表現することも出来る。

ところで、ここで用いた計算方法を用いれば第 4 節で議論した S_α の面積に対して、(4.5) とは別の表示を与えることが出来る。実際、(5.4) または (5.5) で $a = b, \alpha = \beta$ とすればよいので、(5.4), (5.5) より

$$S_\alpha = 2a^2 \alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\Gamma(\alpha)} = 4a^2 \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)^2}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad (5.6)$$

が得られる。(4.5) と (5.6) は共に S_α に対する面積の公式であるから、これらは互いに等しいはずである。これを確認しておこう。その為に、次のガンマ関数の倍数公式を用いる。

(4.5) と (5.6) が等しいことの証明. $\Gamma(1 + \alpha)$ を (2.9) を用いて書き直すと

$$\Gamma(1 + \alpha) = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1 + \alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)$$

となるので, (5.6) と (5.2) より

$$4a^2 \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)^2}{\Gamma(\alpha + 1)} = \frac{4a^2 \sqrt{\pi}}{2^\alpha \Gamma\left(\frac{1 + \alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)^2 = a^2 \alpha \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 + \alpha}{2}\right)}$$

を得る. これは (4.5) で得た表現に他ならない. よって, (4.5) と (5.6) の表現が本質的に同じであることが確かめられた. \square

5.3. $S_{\alpha,\beta}$ の極限操作

$S_{\alpha,\beta}$ について極限操作を考えよう.

まず, $\beta > 0$ を任意に固定し, $\alpha \rightarrow +0$ なる極限操作を考える. このとき, (5.5) より

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} S_{\alpha,\beta} = 4ab \frac{\Gamma(1) \Gamma\left(\frac{\beta}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2} + 1\right)} = 4ab \quad (5.7)$$

を得る. これはすべての $C_{\alpha,\beta}$ に外接する長方形の面積に等しい. 即ち, $\beta > 0$ の値に無関係に $\alpha \rightarrow 0$ とすると, 一定の極限値へ収束する. また, $\alpha \rightarrow +0$ のとき, $\beta \rightarrow +0$ となるとしても, $\lim_{\alpha \rightarrow +0} S_{\alpha,\beta} = 4ab$ が成立することは, (5.5) の表示からわかる.

同様に $\beta > 0$ を固定し, $\alpha \rightarrow +\infty$ なる極限操作を考える. 定理 4.3 (Stirling の公式) より, (5.4) の右辺に現れるガンマ関数の比は

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}} e^{\mu(\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} e^{\mu(\frac{\alpha+\beta}{2})}} \\ &= \frac{e^{\mu(\frac{\alpha}{2})} e^{-\mu(\frac{\alpha+\beta}{2})} e^{\frac{\beta}{2}}}{\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^{\frac{\beta}{2}}} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha}} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

と書き直される. ここで,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{2}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\frac{\beta}{2}} = e^{\frac{\beta}{2}} \quad (5.9)$$

に注意すれば, $\beta > 0$ を固定するとき,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0$$

が従うので, その帰結として $\beta > 0$ を固定するとき

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_{\alpha,\beta} = 0 \quad (5.10)$$

を得る. 特に (5.8), (5.9) より, 0 への収束の仕方は $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{\beta}{2}}$ と同程度であることがわかる. 実際, (5.4), (5.8), (5.9) より, $\beta > 0$ を固定するとき,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{\beta}{2}} S_{\alpha,\beta} = 2ab\beta \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

を得る.

最後に, (4.8) の一般化について考えよう. $K > 0$ を用いて, $\beta = K\alpha$ と書けるとする. このとき, 定理 4.3 より

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 2\sqrt{\pi} e^{\tilde{\mu}(\alpha)} \sqrt{\alpha} \frac{K^{\frac{K\alpha}{2} + \frac{1}{2}}}{(1+K)^{\frac{(1+K)\alpha}{2} + \frac{1}{2}}}$$

を得る. 但し, $\tilde{\mu}(\alpha)$ は $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(\alpha) = 0$ を満たすものである. 従って, $S_{\alpha,\beta}$ は $\beta = K\alpha$ と書けるとき,

$$\sqrt{\alpha} \frac{K^{\frac{K\alpha}{2}}}{(1+K)^{\frac{(1+K)\alpha}{2}}}$$

と同じ速さで 0 に収束する事がわかる. 従って,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{(1+K)^{\frac{(1+K)\alpha}{2}}}{K^{\frac{K\alpha}{2}} \sqrt{\alpha}} S_{\alpha,K\alpha} = 4ab \sqrt{\frac{K}{1+K} \pi} \quad (5.11)$$

を得る. これが, $\beta = K\alpha$ ($K > 0$) と書ける特別な場合の (4.8) に対応する関係式である. 実際, (5.11) で $a = b, K = 1$ とすれば, (4.8) と同値な関係式を得る.

注意 5.2. 上の議論では簡単の為, $\beta = K\alpha$ として, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \beta = \infty$ となる場合のみを考えたが, 実際には $f(\alpha)$ を $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\alpha) = \infty$ を満たすものとして, $\beta = f(\alpha)$ と書ける場合を考えることが出来る. この場合は, (5.11) に相当するものを得る計算はだいぶ煩雑になる. 但し, この場合であったとしても $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_{\alpha,f(\alpha)} = 0$ を示すことは容易である.

6. 曲線 C_α の弧長について

本節では, 曲線 C_α の弧長について考える^{*8}. 一般にパラメータ表示された曲線:

$$C : \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

の弧長 L_C は

$$L_C = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \quad (6.1)$$

によって与えられる事はよく知られている. ここで $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}, \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$ とおいた^{*9}.

そこで, (6.1)に基づいて C_α の長さ L_α を考えてみよう. 図形の対称性に注意すれば, 面積を考えた際と同じようにして,

$$L_\alpha = 4a\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^{2\alpha-2} \sin^2 t + \sin^{2\alpha-2} t \cos^2 t} dt \quad (6.2)$$

が C_α の弧長を与える. この積分を α を用いて表現する事が出来れば, それが C_α の弧長を与える公式に他ならないが, 面積の場合とは異なり, (6.2) を全ての $\alpha > 0$ に対して陽に表示することは出来ない^{*10}. 具体的には, $\alpha = 1, 2, 3$ の場合は初等的な計算で済むが, それ以外の場合については計算は煩雑さを極める^{*11}.

C_α を導入した際に述べたように, $\alpha = 2$ が図形の凸性に関する臨界値になっている. 同時に, 図形的な考察から, $\alpha = 2$ は L_α の最小値を与えるはずである. しかし, (6.2) から, 直接その事実を解析的に示すことは出来なかった. 即ち, L_α を α に応じて表現し, その変化の様相を捉えることは出来なかった. また, 図形の性質から L_α は $\alpha \rightarrow +0, \alpha \rightarrow +\infty$ に於いて $8a$ へと近づくはずである. この事実についても, (6.2) を直接計算して証明することは難しい.

本節では, この 2 つの予想に対し, 幾何学的な直感には一切頼ることなく, 解析的な証明を与える. また, L_α の $\alpha > 0$ に応じた変化の様子を見る為に数値計算を行う. 数値積分に関しては $\alpha > 1$ の場合は容

^{*8} 以下で述べる結果については, $C_{\alpha,\beta}$ についても類似のものが得られるが, 計算が煩雑になる為ここでは省略する.

^{*9} 以下の計算では導関数を表現する記号として $x'(t)$ 等も用いる.

^{*10} 表示できないように思われる.

^{*11} 一応, $\alpha = 4$ も具体的な表示を比較的簡単な計算により得られる.

易であるが, $\alpha < 1$ の場合は特異積分となる為, 単純なアルゴリズムでは上手くいかない. 特に α が 0 に十分に近い場合は収束が極めて遅く, 数値計算はよほど工夫をしない限り正しい結果を与えない.

6.1. L_α の極限について

L_α を直接計算して証明する事は難しいので, 別の方法によって極限値を議論しよう. 方法は単純で, 挟み撃ちの定理を用いる. 即ち, L_α を上と下のそれぞれから評価をして, 極限値は $8a$ であることを示す. 先ずは上からの評価を述べよう. 任意の $\xi \geq 0, \eta \geq 0$ に対して

$$\sqrt{\xi + \eta} \leq \sqrt{\xi} + \sqrt{\eta}$$

なる初等的な不等式に注意すると, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ では $\sin t \geq 0, \cos t \geq 0$ であることより,

$$\begin{aligned} L_\alpha &\leq 4a\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^{2\alpha-2} t \sin^2 t} + \sqrt{\sin^{2\alpha-2} t \cos^2 t} dt \\ &= 4a\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{\alpha-1} t \sin t + \sin^{\alpha-1} t \cos t) dt = 8a \end{aligned} \quad (6.3)$$

を得る. 最後の積分の計算は $\sin t = (-\cos t)', \cos t = (\sin t)'$ に注意すれば容易に分かる. これより, L_α は上に有界で, その上限は $8a$ を超えない事が分かる.

次に下からの評価を考える. 任意の実数 ξ, η に対して $\xi^2 + \eta^2 = (\xi + \eta)^2 - 2\xi\eta$ が成り立つことに注意すると, $\xi, \eta \geq 0$ ならば

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \geq (\xi + \eta) - \sqrt{2}\sqrt{\xi\eta} \quad (6.4)$$

を得る. そこで, $\xi = \cos^{\alpha-1} t \sin t, \eta = \sin^{\alpha-1} t \cos t$ と見て (6.4) を用いれば, (6.3) とあわせて, L_α は下から次のように評価される.

$$\begin{aligned} L_\alpha &\geq 4a\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{\alpha-1} t \sin t + \sin^{\alpha-1} t \cos t) dt - 4a\alpha\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{\alpha}{2}} t \sin^{\frac{\alpha}{2}} t dt \\ &= 8a - 4\sqrt{2}a\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{\alpha}{2}} t \sin^{\frac{\alpha}{2}} t dt \\ &= 8a - 2\sqrt{2}a\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 / \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

最後の積分の計算は S_α を求めた際と同様の変数変換による.

従って, (2.5), (6.3), (6.5) と挟み撃ちの定理より, 直ちに $\lim_{\alpha \rightarrow +0} L_\alpha = 8a$ が従う.

更にガンマ関数の倍数公式 (2.9) を用いれば,

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2}\right)^2 / \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha}{4} + 1\right)$$

であるから, (6.3), (6.5) より

$$8a \geq \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} L_\alpha \geq 8a - 2\sqrt{2}a \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2^\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha}{4} + 1\right) = 8a$$

と評価されるので, 挟み撃ちの定理より $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} L_\alpha = 8a$ も従う.

以上をまとめて次を得た.

定理 6.1. C_α の弧長 L_α について次が成立する.

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} L_\alpha = 8a, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +0} L_\alpha = 8a. \quad (6.6)$$

6.2. L_α の最小値を与える $x(t), y(t)$ について

L_α の積分表示から, $\alpha = 2$ で最小値をとることを微分法を用いて証明するのは極めて難しく現実的ではない^{*12}. そこで発想を変えて, 次のような事を考えよう.

$(C_\alpha)_{\alpha>0}$ は $t = 0$ のとき点 $(a, 0)$, $t = \frac{\pi}{2}$ のとき点 $(0, a)$ を通るパラメータ曲線のうち, 特別なものを集めた集合と考えることが出来る. C_α 以外のパラメータ表示をもつような全ての曲線の集まり \mathcal{C} を考えて, そのような曲線のうちで, 最小値を与えるものが C_2 に他ならない事を示せれば $(C_\alpha)_{\alpha>0} \subset \mathcal{C}$ であるから, L_α の最小値を与えるものは L_2 と言える. これを変分原理を用いて示そう^{*13}.

$x(t), y(t)$ に対する汎関数 L を

$$L(x(t), y(t)) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \quad (6.7)$$

と定める. 境界条件として

$$x(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(0) = 0 \quad (6.8)$$

を課す. 汎関数 L の値を最小にするような関数 $x(t), y(t)$ を見つけることが我々の目標である.

変分原理を用いる為に, 次の変分法の基本補題を用意する.

補題 6.2 (変分法の基本補題). $f(x) \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ ($n \geq 1$) とする^{*14}. $\varphi(a) = \varphi(b) = \mathbf{0}$ を任意の連続関数 $\varphi([a, b]; \mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b \sum_{j=1}^n f_j(x) \varphi_j(x) dx = 0$$

ならば, $f(x) \equiv \mathbf{0}$ である.

十分に滑らかで $t = 0, t = \frac{\pi}{2}$ で 0 となる関数 $h(t), k(t)$ をとり, 汎関数 L の第 1 変分を計算する. $\varepsilon > 0$ に対して $L_\varepsilon = L(x(t) + \varepsilon h(t), y(t) + \varepsilon k(t))$ は ε の関数と見れるので, 通常の意味での導関数を計算できる. 従って,

$$\begin{aligned} DL = \frac{d}{d\varepsilon} L_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{2\dot{x}(t)\dot{h}(t) + 2\varepsilon\dot{h}(t)^2 + 2\dot{y}(t)\dot{k}(t) + \dot{y}(t)^2}{\sqrt{(\dot{x}(t) + \varepsilon\dot{h}(t))^2 + (\dot{y}(t) + \varepsilon\dot{k}(t))^2}} dt \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \dot{h}(t) + \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \dot{k}(t) \right) dt \end{aligned}$$

を得る. h, k の境界での値が 0 であることに注意すれば, 部分積分法より

$$= - \int_0^{\pi/2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \right) h(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \right) k(t) dt$$

を得る. $(x(t), y(t))$ が汎関数 L の停留点, 即ち $DL = 0$ とする. いま, $h(t), k(t)$ は任意の関数であったから, $DL = 0$ とすると変分法の基本補題により微分方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \right) = 0, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad (6.9)$$

を得る. これは, 汎関数 $L(x(t), y(t))$ から得られる Euler-Lagrange 方程式にほかならない. この Euler-Lagrange 方程式より, 次の微分方程式系を得る.

$$\ddot{x}(t)(\dot{y}(t))^2 - \dot{x}(t)\dot{y}(t)\ddot{y}(t) = 0 \quad (6.10)$$

$$\ddot{y}(t)(\dot{x}(t))^2 - \dot{y}(t)\dot{x}(t)\ddot{x}(t) = 0 \quad (6.11)$$

*12 L_α を α で微分し, 極値を与える α を求めればよいが, 計算は煩雑さを極める. 初等的な計算では不可能に思える.

*13 记分原理についての詳細は, Gelfand & Fomin [2] や高桑 [11] 等を参照されたい.

*14 $C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ は閉区間 $[a, b]$ 上で定義された, \mathbb{R}^n 値の連続なベクトル値関数の全体を表す.

$\dot{y}(t)\ddot{y}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{y}(t)^2$ に注意すれば, (6.10) は

$$\frac{\ddot{x}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{y}(t)^2 \frac{1}{\dot{y}(t)^2} \quad (6.12)$$

と書き直すことができる. 従って, t について積分すれば

$$\log |\dot{x}(t)| = \frac{1}{2} \log \dot{y}(t)^2 + C_1 = \log \dot{y}(t) + C_1 \quad (6.13)$$

を得る. ゆえに, 任意定数 C_1 をとり直せば $\dot{x}(t) = C_1 \dot{y}(t)$ となるので, 更に t について積分すれば $x(t) = C_1 y(t) + C_2$ を得る. 境界条件を考慮すると任意定数が $C_1 = -1, C_2 = a$ と決定される. 実際, $t = 0$ を考えれば, $x(0) = a, y(0) = 0$ より, $C_2 = a$ である. $t = \frac{\pi}{2}$ を考えれば, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$ と $C_2 = a$ より $C_1 = -1$ となる.

以上により, 汎関数 L を最小化する関数 $(x(t), y(t))$ は

$$x(t) + y(t) = 1 \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.14)$$

を満たす関数であることがわかった. 微分方程式 (6.11) から得られる解 $(x(t), y(t))$ も同じものである. 言い換えれば, $x + y = a$ という xy 平面上の直線が, 与えられた境界条件 (6.8) の下での汎関数 L の最小値を与える. 第1象限におけるこの直線のパラメータ表示は $x(t) = a \cos^2 t, y(t) = a \sin^2 t$ であり, これは曲線 C_2 のパラメータ表示に他ならない. よって, \mathcal{C} のうちで弧長の長さが最小となるものは C_2 である. $C_2 \in (C_\alpha)_{\alpha>0} \subset \mathcal{C}$ より, $(C_\alpha)_{\alpha>0}$ のうち弧長が最小となるものは C_2 によって達成される事が示された.

定理 6.3. $(L_\alpha)_{\alpha>0}$ の最小値は L_2 によって達成される. 即ち,

$$\min_{\alpha>0} L_\alpha = L_2 = 4\sqrt{2}a$$

となる.

注意 6.1. 上の証明は xy 平面上の適当な二点を通る曲線の中で, 弧長の最も短いものは「直線」である事へ一般化される.

注意 6.2. $C_{\alpha,\beta}$ についても同様の事実を示すことは, 若干の修正の下で容易になれる. ここでは紙数の都合で割愛する.

6.3. L_α の数値計算

以上の議論によって, $\alpha \rightarrow +0, +\infty$ での L_α の極限値がともに $8a$ であること, 及び L_2 が L_α の最小値を与えることが明らかとなった. 上でも述べたように, 特定の α を除いて, L_α の表示を α に応じて与えることは難しく, 初等的な計算で具体的な表示を得ることが出来たのは, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ の場合のみである^{*15}.

図形的な考察から明らかなように, L_α は $0 < \alpha < 2$ では単調減少であり, $a \geq 2$ では単調増加である. この事実を認めれば, L_α の α に応じた変化がどのようなものであるか, 大雑把な理解は出来る. しかし, L_α が具体的にどのように変化をするのか, という事まではわからないし, $\alpha > 0$ を与えた際に L_α の値がどの程度であるかといった情報を得ることも出来ない. そこで, ここでは L_α の変化の様子を知るために, L_α の数値計算を行う. 即ち, 数値積分を用いて L_α の近似値を計算する.

数値積分を計算する方法としては, 台形公式や Simpson の公式など様々な方法があるが, いずれを用いて数値計算したとしても $\alpha < 1$ の場合には, 理論及び上の予想と合う結果が得られない. これは $\alpha < 1$ の場合には L_α を特徴付ける積分が特異積分である為であり, 特に α が 0 に近くなればなるほど, $t = 0$, または $t = \frac{\pi}{2}$ における被積分関数の特異性が強くなるためである.

^{*15} 数式処理ソフト Mathematica を用いて, L_5 の積分を計算すると煩雑な特殊関数による表示が得られるが, ともて「わかつた」とは言えないような表示であり実用性に欠ける.

理論的に $\alpha \rightarrow +0$ では $8a$ に収束する事がわかっているので、この事実に合うような数値計算結果が得られればよい。 $\alpha < 1$ のとき、 L_α の被積分関数は $t = 0, \frac{\pi}{2}$ の 2 点を特異点としてもつことは (6.2) の表示から明らかである。被積分関数の対称性に注目して、先ずは特異点を 1 点のみになるように書き直そう。

対称性に注目すると、

$$L_\alpha = 8a\alpha \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^{2\alpha-2} t \sin^2 t + \sin^{2\alpha-2} t \cos^2 t} dt$$

と書き直すことが出来る。更に、 $\tan t = s$ とおくと $ds = (1 + \tan^2 t) dt = (1 + s^2) dt$ であり、この変数変換によって積分区間は $[0, 1]$ に移るので、 L_α は次のように書き直される。

$$L_\alpha = 8a\alpha \int_0^1 \frac{1}{(1+s^2)^{1+\frac{\alpha}{2}}} \sqrt{s^2 + \frac{1}{s^{2-2\alpha}}} ds \quad (6.15)$$

これにより、特異点を $s = 0$ のみに書き直すことが出来た。

$\alpha < 1$ における L_α の数値積分を計算する方法として**二重指數関型変換法（DE 法）** という方法を用いる。DE 法は特異積分や無限積分を数値的に計算する方法として 1974 年に Takahasi & Mori [10] によって考案された方法である（あわせて森 [6, 5] を参照されたい）。特異積分についてのみ述べると、特異点近傍を無限遠方に押しやるような変数変換を考え、二重の指數関数の重みをかけて値が発散しないように抑え込み、数値積分の値を計算する。

(6.15) で形式的に $\alpha = 0$ とすると、 s の負ベキとして s^{-1} が登場する。即ち、 $\alpha > 0$ では (6.15) は可積分ではあるが、 α が 0 付近では被積分関数の特異性は可積分性が保たれるギリギリの値である。従って、DE 法を用いるにしても、数値計算には依然として工夫を要する（例えば、渡辺 [13] を参照せよ）が、紙数の都合上、細かい処理は割愛する。

実際に数値計算を行った結果、 L_α の数値計算結果のグラフは図 6.1 のようになった^{*16}。 $\alpha = 1, 2, 3$ では理論値と一致する結果が得られており、 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} L_\alpha = 8$ となる様子が見て取れる。また、 α の増大に伴い 8 に漸近する様子も見て取れる。

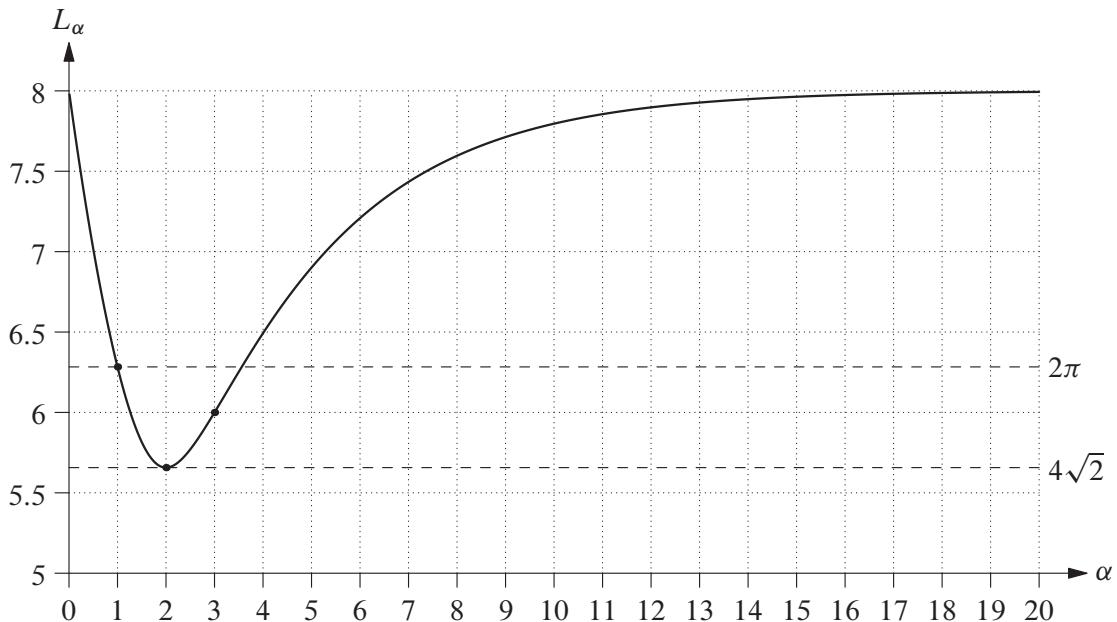


図 6.1. L_α の数値計算結果

^{*16} $a = 1$ とした。

参考文献

- [1] E. Artin. *Einführung in die theorie der Gammafunktion*. Verlag B.G.Teubner, 1931.
- [2] I.M. Gelfand & S.V. Fomin. *Calculus of variations*. Dover Publications, 1963
- [3] J.D. Lawrence. *A catalog of special plane curves*. Dover Publications, 1972.
- [4] E.H. Lockwood. *A book of curves*. Cambridge University Press, 1960.
- [5] 森 正武. 数値解析. 第二版. 共立出版, 2002.
- [6] 森 正武. 二重指数関型変換のすすめ. 数理解析研究所講究録, **1040**, 143–153, 1998.
- [7] 野崎 昭弘. π の話, 岩波現代文庫, 岩波書店, 2011.
- [8] 森口繁一・宇田川かね久・一松信. 岩波 数学公式 III 特殊関数, 岩波書店, 1960.
- [9] 高木貞治. 解析概論 [改訂第三版], 岩波書店, 1983.
- [10] H. Takahasi and M. Mori. Double exponential formulas for numerical integration. *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **9**, 721–741, 1974.
- [11] 高桑昇一郎. 微分方程式と変分法—微分積分で見えるいろいろな現象. 共立出版, 2003.
- [12] 竹之内脩・伊藤隆. π — π の計算アルキメデスから現代まで—. 共立出版, 2007.
- [13] 渡辺二太. 2重指数関型数値積分公式について. 核融合研究 **63**, 397–411, 1990.

(2013年5月20日受付)

(2013年7月10日受理)