

# 有限要素法による富山湾内の流れのシミュレーション

西川 陽子, 宇波 晶子, 牧野 一憲, 本田 和博,  
堀田 裕弘, 村井 忠邦

Finite Element Simulation of water flow in Toyama bay

Yoko Nishikawa, Akiko Unami, Kazunori Makino,  
Kazuhiro Honda, Yuukou Horita, Tadakuni Murai

An analysis of the water flow in bay or ocean is important for estimating the environmental pollution or the tidal wave. In this paper, numerical simulations of wave propagation in Toyama bay are presented. The water flow is assumed to be non-compressible shallow water flow, and finite element method is applied to calculate the distributions of velocity and water elevation. It is found that the finite element technique shown here is efficiently applicable to the calculation of the velocity distribution. However, there are technical problems, such as the suppression of the spurious oscillation and the treatment of the open boundary condition.

Key words: Finite element method, Shallow water, Toyama bay

## 1 はじめに

近年, 産業排水, 生活排水やダムに堆積した土砂が汚染源となって, それらが流出する海域が汚染されるケースが多く報告されている。これらのような環境汚染を解決するためには, 観測を強化し, 観測データから全体の流れの状況を把握・解析することが必要である。ただ, 現地での観測には様々な制限があり, 観測点をむやみに増やすことは困難である。また, 観測では様々な異なる条件下における状況を予測することはきわめて困難である。従って, 流域の流れの状況を知るための手段として数値的なシミュレーションを計算機上で実行し, 観測データとシミュレーションを併用して全体を解析することが有効な手法と考えられる。さらに, 数値シミュレーションでは現実には生じていない現象も模擬することが出来, どのような条件下で汚濁物質が海域に拡散するか, あるいは遠方より伝搬してきた波が湾岸において津

波や高潮などの被害を及ぼすかどうか等もある程度予測可能になると考えられる。

本論文では, このような背景をふまえて, 特有な形状と大きな河川を湾岸にもつ富山湾における流れの数値シミュレーションを試みた。この際, 一般には自然現象を完全に表す方程式を見出すことが困難であるが, 湾内の流れを浅水長波の流れとして扱い, この基礎方程式を有限要素法で解くことで, 河川からの急激な流出水がある場合や近海に大きな波高値の波が出現したときの流れの時間的変化の計算を試みた。以下, 計算手法とシミュレーション結果を示す。

## 2 浅水長波流れと離散化

### 2.1 浅水長波流れ

波の運動の性質は, 波高 $H$ , 波長 $L$ , 周期 $T$ , 水深 $h$ および波の伝搬速度 $c$ などによって記述され,

図1のように相対水深  $h/L$  が十分に小さい ( $1/20$  以下) 場合には浅水長波となる。この場合、どの深さでも流速は同じであると見なす断面平均流速の考えが導入可能で、鉛直方向の運動は無視できる ( $z$  方向の流速を0とする)。すなわち、2次元の流れとして考えることができる。

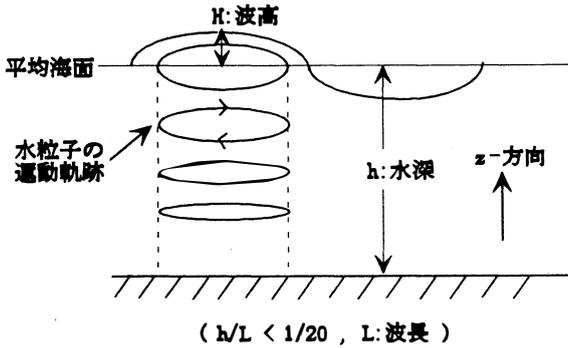


図1 浅水長波の図

## 2.2 支配方程式と境界条件

非圧縮粘性流体の運動を記述するナビエ-ストークスの運動方程式とオイラーの連続方程式に断面平均流速 ( $U, V$ ) を導入することにより、浅水長波流れの支配方程式は次のようになる[1],[2]。

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (h+H)U \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ (h+H)V \} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial H}{\partial x} - Al \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial H}{\partial y} - Al \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} = 0 \quad (3)$$

ここで、 $t$  は時間、 $H$  は波高、 $h$  は水深、 $U, V$  はそれぞれ波による水粒子の  $x, y$  方向の断面平均流速、 $g$  は重力加速度、 $Al$  は鉛直方向に平均化された粘性係数である。(1)式が連続方程式、(2)、(3)式がそれぞれ  $x, y$  方向についての運動方程式である。

境界条件として、海岸線  $\Gamma_1$ 、沖合いの仮想的な境界  $\Gamma_2$ 、河口  $\Gamma_3$  の三種を次のように想定する。

$$\begin{aligned} q &= \hat{q} & \text{on } \Gamma_1 \\ H &= \hat{H} & \text{on } \Gamma_2 \\ U &= \hat{U}, V = \hat{V} & \text{on } \Gamma_3 \end{aligned}$$

ここで  $q$  は境界外向き法線方向の流速で、記号  $\hat{\quad}$  は規定値であることを示す。

## 2.3 重み付き残差表現

有限要素法定式化には重み付き残差法を適用する。支配方程式に境界条件を考慮した重み付き残差表現は、

$$\int \omega \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (h+H)U \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ (h+H)V \} \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \omega (h+H) \{ (Un_x + Vn_y) - \hat{q} \} d\Gamma = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \int \omega \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial H}{\partial x} \right\} d\Omega \\ & + Al \int_{\Omega} \left\{ 2 \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right\} d\Omega \\ & - 2Al \int_{\Gamma} \omega \frac{\partial U}{\partial x} n_x d\Gamma - Al \int_{\Gamma} \omega \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) n_y d\Gamma = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int \omega \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial H}{\partial y} \right\} d\Omega \\ & + Al \int_{\Omega} \left\{ 2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} d\Omega \\ & - Al \int_{\Gamma} \omega \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) n_x d\Gamma - 2Al \int_{\Gamma} \omega \frac{\partial V}{\partial y} n_y d\Gamma = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

ここで、 $\omega$  は重み関数で、 $\Omega$  は解析領域、 $\Gamma$  は全境界を示す。 $n_x, n_y$  はそれぞれ境界での外向き法線ベクトルの  $x, y$  方向成分である。

## 2.4 離散化表現

(4)~(6)式の離散化に際して、空間についてはガラーキン法で、時間については、後退差分法を適用する。この場合、補間関数のベクトルを  $N$ 、要素節点における  $H, U, V$  などを  $H, U, V$  のように表すと、各要素ごとに以下のような離散化表現が得られる。

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}\mathbf{N}^T \left[ \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{H}^{t+\Delta t} - \mathbf{H}^t) - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} (\mathbf{h} + \mathbf{H}^{t+\Delta t})^T \mathbf{U}^{t+\Delta t} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} (\mathbf{h} + \mathbf{H}^{t+\Delta t})^T \mathbf{V}^{t+\Delta t} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}\mathbf{N}^T d\Omega (\mathbf{h} + \mathbf{H}^{t+\Delta t}) \hat{q} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{N}\mathbf{N}^T \left[ \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}^t) + \mathbf{U}^{t+\Delta t} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{U}^{t+\Delta t} + \mathbf{V}^{t+\Delta t} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{U}^{t+\Delta t} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N} d\Omega g \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{H}^{t+\Delta t} \\ & + 2Al \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{U}^{t+\Delta t} \right) d\Omega \\ & + Al \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{U}^{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{V}^{t+\Delta t} \right) d\Omega \\ & - 2Al \int_{\Gamma} \mathbf{N} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{U}^{t+\Delta t} \right) n_x d\Gamma \\ & - Al \int_{\Gamma} \mathbf{N} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{U}^{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{V}^{t+\Delta t} \right) n_y d\Gamma = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{N}\mathbf{N}^T \left[ \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{V}^{t+\Delta t} - \mathbf{V}^t) + \mathbf{U}^{t+\Delta t} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{V}^{t+\Delta t} + \mathbf{V}^{t+\Delta t} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{V}^{t+\Delta t} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N} d\Omega g \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{H}^{t+\Delta t} \\ & + 2Al \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{V}^{t+\Delta t} \right) d\Omega \\ & + Al \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{V}^{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{U}^{t+\Delta t} \right) d\Omega \\ & - 2Al \int_{\Gamma} \mathbf{N} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{V}^{t+\Delta t} \right) n_y d\Gamma \\ & - Al \int_{\Gamma} \mathbf{N} \left( \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \mathbf{V}^{t+\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{U}^{t+\Delta t} \right) n_x d\Gamma = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

ここに、 $\Delta t$ は微小時間増分量である。

各要素についての寄与から全体の方程式が組み立てられる。この際、解くべき方程式は非線形であるため、ニュートン法を用いて解を求める。

### 3 シミュレーション例

数値シミュレーションは、河川から湾内へ流入水があるときの流れ解析と湾内の1箇所の波が突然上昇したときの流れ解析の2つについて行った。

図2にシミュレーションで使用した領域と境界を示す。

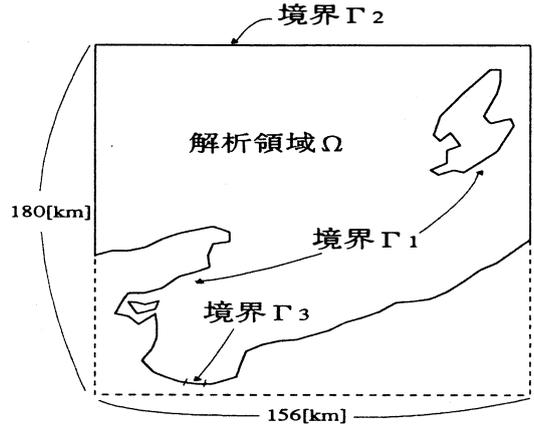
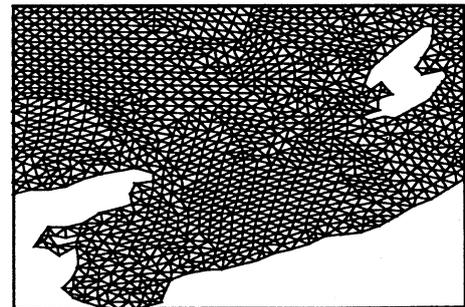


図2 領域と境界

図3に節点分布法（デローニ分割法）[4]を用いて自動分割した要素分割図を示す。この際、要素として三角形線形要素を用いた。

$\Delta t$ は伝搬速度と要素の大きさを考慮して次のようにして与えた。すなわち、波の代表的伝搬速度は $\sqrt{gh}$ で近似できるので最も水深 $h$ が大きい場合の時間刻み幅を $\Delta t < [\text{要素の大きさ}] / \sqrt{gh}$ として算出し、これを十分満足するように $\Delta t = 10[s]$ とした。水深については地図から読み取った実測データを用いた。



節点数： 1176  
要素数： 2182

図3 要素分割図

また、水の粘性係数は、 $\mu = 0.89 \times 10^{-3} [Pa \cdot s]$ とした。

### 3.1 河川流入水による流れの解析

境界条件としては、海岸線の境界  $\Gamma_1$  で法線方向の流速を 0 とする。沖合いの境界  $\Gamma_2$  は開いている境界（仮想境界）であり、本来ならば無反射になるような条件を与えなければいけないが、簡単のため  $\Gamma_1$  と同様とした。河口の境界  $\Gamma_3$  では河川からの流入を想定して流速を与えた。（図 2 参照）また、初期条件は領域  $\Omega$  全体で流速、波高ともに 0 が与えられているものとした。すなわち、境界条件は

$$\begin{aligned} q &= 0 & \text{on } \Gamma_1, \Gamma_2 \\ U = \hat{U}, V = \hat{V} & & \text{on } \Gamma_3 \end{aligned}$$

境界  $\Gamma_3$  において与える流速については、北陸地方建設局水文・水質データベースより、神通川の1995年統計流量の最大流量が約  $1800 [m^3/s]$  であるとした。この流量を河口の断面積（深さ×距離）で割った値が約  $0.051 [m/s]$  であると算出し、これを流速ベクトルとして x, y 方向に分解し、それぞれ  $\hat{U}$ ,  $\hat{V}$  とした。

図 4 に流速分布の時間変化を示す。図より、河川からの流出によって富山湾で流れが生じ、その影響が湾外へと伝わっていく様子が見られるものの、解の精度は不十分であることが分かる。すなわち、湾岸における反射波が大きく評価され、流れの向きがかなり不規則になっている。今後、汚濁物質の拡散を評価するためにも、解の精度を改善する必要がある。

### 3.2 佐渡島付近に波高を与えた場合

境界条件としては、境界  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  においては前例と同様である。 $\Gamma_3$  においては  $\Gamma_1$  と同じとする（図 2 参照）。また、初期条件は領域  $\Omega$  全体で流速、波高ともに 0 が与えられているものとし、佐渡島付近の海上の 1 点に波高  $100 [m]$  を与えた。

図 5 に鳥瞰図で示した波高分布と流速分布の時間変化を示す。図により、波の伝搬は地形による影響を大きく受け、波が沿岸に到達する時間、波の高さの様子は分かる。しかし、波高値の分布に、にせの振動と思われる振動が生じており、流れも図 4 と同様に不規則になっている。

## 4 おわりに

非圧縮粘性流体の浅水長波流れにおける平均流での解析を行った。その結果、おおまかな流れの様子は求められたものの、得られた解の精度は現段階では不十分で、これについては検討を要することも分かった。今後、無反射境界の定式化[4]を導入すると共に、解の精度を改善したい。また、拡散方程式を考慮した汚濁物質の拡散のシミュレーションについて、現在、波高値や粘性を考慮しない線形の浅水長波方程式を用いてシミュレーションした例[5]が報告されているが、ここで示したような粘性をも考慮した基礎方程式を用いてより実際的な解析を行いたい。

## 文 献

- [1] 檜山, “浅水長波流れ”, 日本数値流体力学会 第 4 回講習会資料, 「有限要素法流れ解析の - 基礎と応用」 pp.203-220 (1995)
- [2] 数値流体力学編集委員会編, 「非圧縮性流体」, 東京大学出版 (1995)
- [3] 谷口健男, 「FEMのための要素自動分割 - デローニー三角分割法の利用 -」, 森北出版 (1992)
- [4] 店橋, 宮内, “乱流燃焼の直接数値計算”, 日本数値流体力学学会, 第 6 巻, 第 4 号, pp.131-144 (1998)
- [5] 近藤, 川原, “カルマンフィルタ・有限要素法の拡散現象への適用”, 日本数値流体力学会, 第11回数値流体力学シンポジウム論文集, F9-2 (1997)

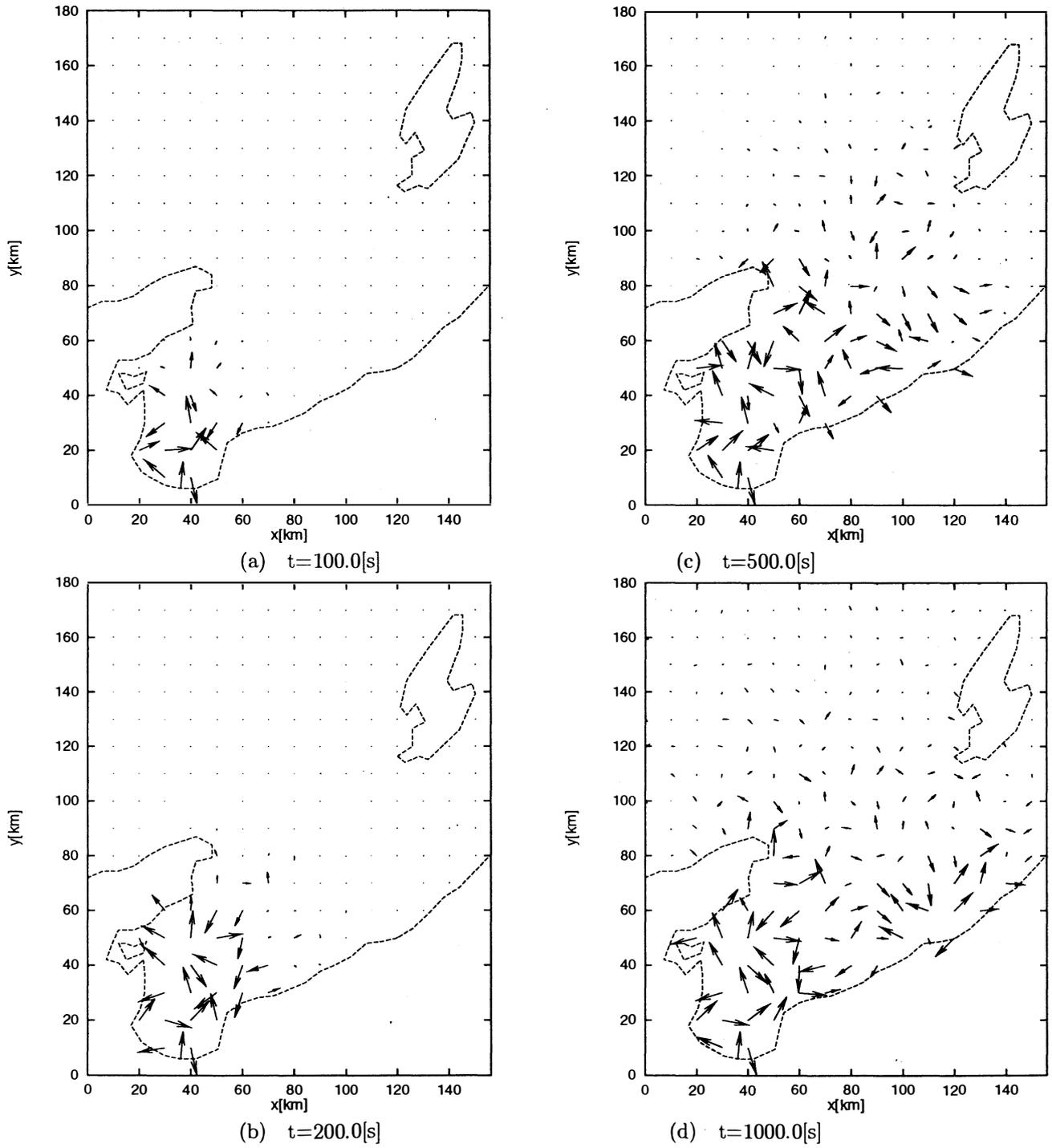
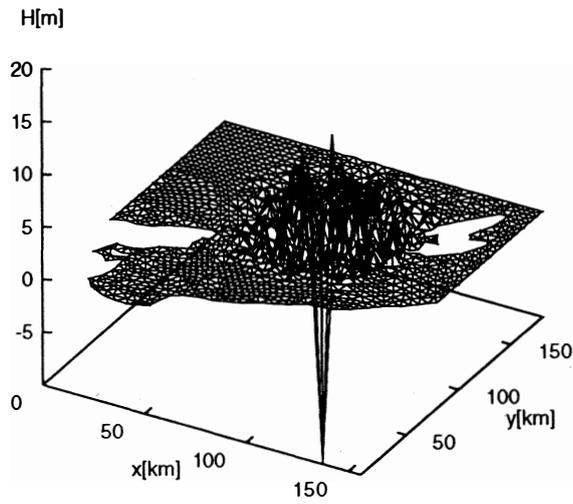
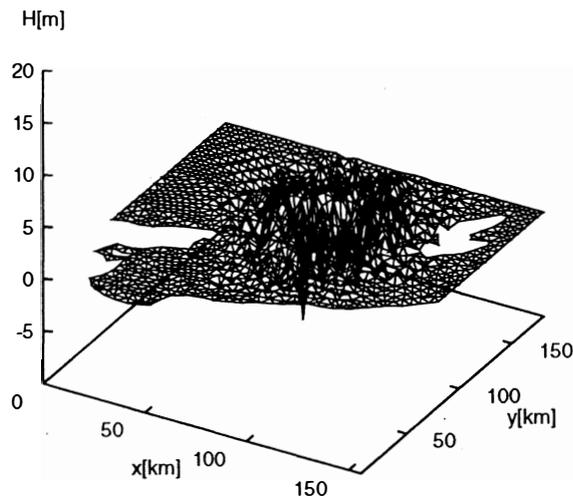
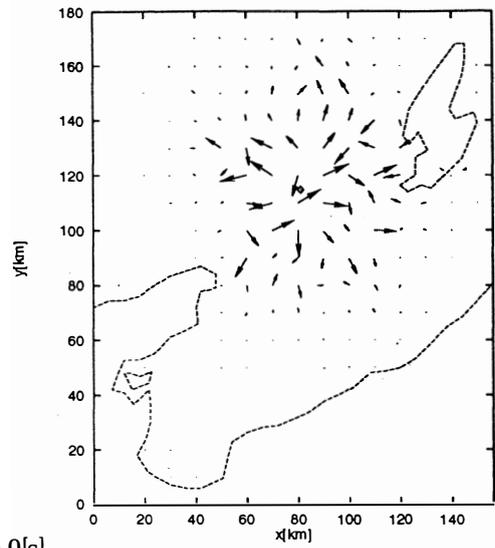


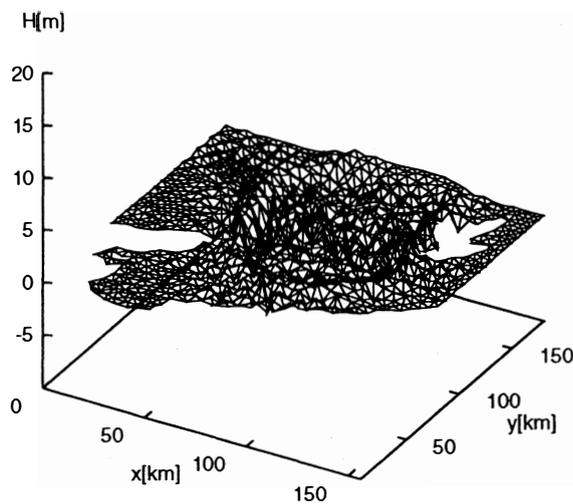
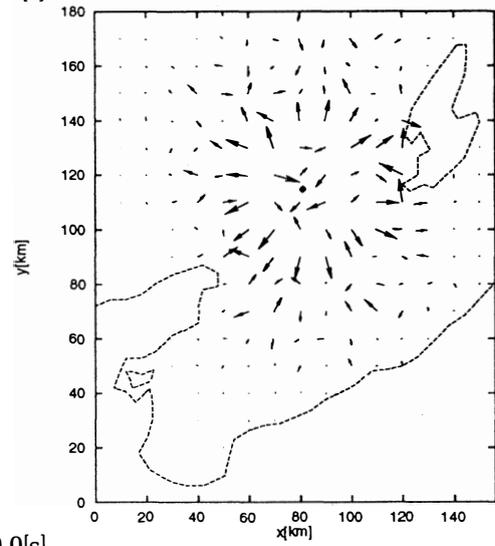
図4 流速  $U$ ,  $V$  の変化の様子



(a)  $t=100.0[s]$



(b)  $t=200.0[s]$



(c)  $t=500.0[s]$

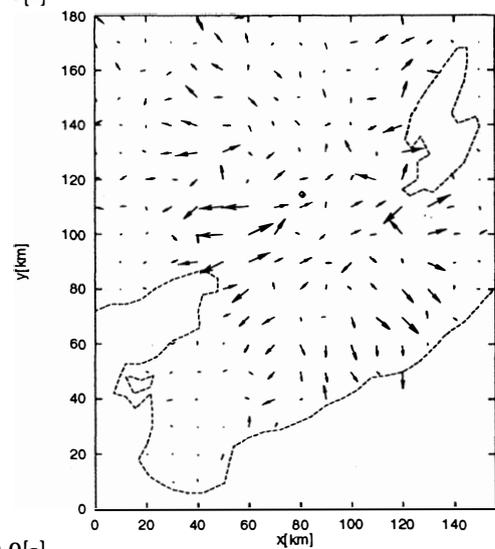


図5 波高Hの様子(左図)と、流速U, Vの様子(右図)