

SPH 法に関する基礎的研究*
(第1報, 2相流境界問題の取扱い)小原 治樹^{*1}, 末村 潤^{*2}, 本田 真理子^{*2}Fundamental Study of SPH Method
(1st Report, Treatment of 2 Phase Flow)Haruki OBARA^{*3}, Jyun SUEMURA and Mariko HONDA^{*3} Department of Mechanical System Engineering, Toyama University,
3190 Gofuku, Toyama-shi, Toyama, 930-8555 Japan

The smoothed particle hydrodynamics (SPH) method developed by Lucy, Benz, Gingold, Monaghan and Liversky has a problem of numerical disorder at the boundary of 2 phase flow as gas and liquid. In this paper, new formulas of SPH method, named Relaxation equations, suited for treating 2 phase flow of non-viscous fluid are proposed. The Relaxation equations are constructed based on the mass conservation equation and the momentum conservation equation. By using the formulas, it is possible to suppress numerical disorder around the boundary of 2 fluids.

Key Words: Numerical Analysis, SPH, Particle Method, Numerical Disorder, 2 Phase Flow

1. 緒言

Lucy, Benz, Gingold, Monaghan, Liversky^{(1), (2)}らが開発した SPH 法は, 格子を用いる解析法と異なり, 連続体を粒子の集合として扱う粒子法であるため, 格子相互位置関係の情報を必要としない. また, 自由表面の判定と表面物性値の設定を必要としないため, 波の破碎現象, 噴射飛散現象など, 物質の破壊, 飛散の取扱いが容易であり, さらに異なる物質が混在する場合に, その境界面を意識することなく解析できるなど, 従来のオイラー法やラグランジェ法で取扱いが困難な分野をカバーする解析法である. SPH 法は, 当初は超新星爆発などの宇宙流体の解析や宇宙船隔壁破壊問題⁽³⁾などに多く用いられていたが, 近年, 多くの工学問題

への適用が試みられている. しかしながらこの解析法にはいくつか解決すべき問題点が残されている. その一つが気体と液体のように密度が大きく異なる 2 相流体流れにおいて, 2 流体の接触面近傍で加速度や圧力が異常値になるため, 場合によっては解析が停止する, という問題であり, この問題は, 密度のみならず, 他の物性値が大きく異なる 2 流体接触面でも発生する. その他にも, 自由境界近傍で端末効果を生じる, 境界条件の設定法が確立されていない, などの問題があるが, 特に異なる物質の接触面での数値異常問題が重要であり, これが解決されれば, その適用分野が大きく広がる. 我々は気体・液体・固体の連成問題解析法の確立を目指す, 本論文では 2 相流体流れの接触面数値異常問題について検討し, 新しい計算式を提案する.

2. SPH 法

SPH 法では, 物理量は各点 X_j を中心としてある分布形を持ち, 任意点 X の物理量は各点の分布量の重ね合わせであると仮定し, 平均値, および 1 次勾配を,

* 原稿受付 2006 年 3 月 15 日.

^{*1} 正員, 富山大学工学部 (〒930-8555 富山市五福 3190).^{*2} 学生員, 富山大学工学部.

E-mail: obarah@eng.u-toyama.ac.jp

$$\langle f(X) \rangle = \sum_{j=1}^N f_j \frac{m_j}{\rho_j} W(X - X_j, h) \quad (1)$$

$$\left\langle \frac{\partial f(X)}{\partial x} \right\rangle = \sum_{j=1}^N f_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W(X - X_j, h)}{\partial x} \quad (2)$$

のように求める。ここで W は空間積分値が1となるガウス関数やBスプライン関数、 ρ は密度、 m は質量とする。 h は平滑長さで、通常、

$$h = \eta \left(\frac{m}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{通常 } \eta = 1 \quad (3)$$

とする。また、連続の式には Libersky⁽²⁾ は

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} = & -\rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \left\{ [u_j - u_i] \frac{\partial W}{\partial x} \right. \\ & \left. + [v_j - v_i] \frac{\partial W}{\partial y} + [w_j - w_i] \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

を用い、高岡等⁽³⁾ は

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} = & -\sum_j m_j \left\{ [u_j - u_i] \frac{\partial W}{\partial x} \right. \\ & \left. + [v_j - v_i] \frac{\partial W}{\partial y} + [w_j - w_i] \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

用いている。ここで、 u, v, w は x, y, z 方向の速度を表す。式中の h および $\partial W / \partial x$ の取り方については次報で議論するが、ここでは h には h_j を用い、 $\partial W / \partial x$ は i 位置における W_j の x 方向微分値として、必要に応じて $\partial W / \partial x_i$ と表す。

粘性なしの流体の運動方程式を平均化すると、本来は (x 方向のみ書く。ここでは Primitive eq. と呼ぶ)

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} p_j \frac{\partial W}{\partial x} \quad (6)$$

であるが、この式は i, j 粒子間の運動量保存則を満たさないため、通常は Monaghan の式⁽¹⁾

$$\frac{du_i}{dt} = -\sum_j m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} \quad (7)$$

が用いられる。 p は圧力を表す。

3. 2相流境界問題

3.1 2相流境界問題の評価モデル 本来、SPH法は、異なる物質が混在するような状態においてその境界を意識することなく解析することが可能な解析法である。例えばアルミの宇宙船隔壁に銅のスペースデブリが高速衝突するような問題⁽⁴⁾や、水を満たした容器

中の爆発問題などに適用されている⁽⁵⁾。しかしながら実際には、気体と液体のように大きく密度が異なるとき、その接触境界近傍では加速度や圧力が異常な値となり解析が不可能になる。ここではこれを2相流境界問題と呼ぶ。

2相流境界問題を評価するにはどのようなモデルで評価すべきかがまず問題になる。ここでは次のモデルを提案し、これについて検討する。1次元の連続の式を書き換えると、圧力についての式、

$$\frac{dp}{dt} = -\rho C^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad C^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (8)$$

が得られる。ここで C は音速である。また1次元の運動方程式は、

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9)$$

である。いま、左を気体、右を液体とし、それらが分離せずに流れる準定常流れであれば、境界の左右の流体圧力は等しい。従って左右の流体の圧力増加も等しいはずである。それ故、式(8)から、境界では

$$-\rho_{\text{gas}} C_{\text{gas}}^2 \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{\text{gas}} = -\rho_{\text{liquid}} C_{\text{liquid}}^2 \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{\text{liquid}} \quad (10)$$

となり、左右の流体の $\rho C^2 \partial u / \partial x$ が等しくなければならないことがわかる。すなわち左右の流体の速度勾配が ρC^2 に反比例する。同様に、左右の流体の速度は等しいから、左右の流体の加速度が等しく、従って式(9)から、境界では

$$-\frac{1}{\rho_{\text{gas}}} \frac{\partial p}{\partial x} \bigg|_{\text{gas}} = -\frac{1}{\rho_{\text{liquid}}} \frac{\partial p}{\partial x} \bigg|_{\text{liquid}} \quad (11)$$

となり、各流体の圧力勾配が密度に比例することが分かる。そこでそのような圧力勾配と速度勾配を与えた2相の準定常流れ場を考えれば、左右の流体の加速度と圧力増加速度は一定値となるはずである。これらの理論値とSPH法による計算値との違いが、2相流境界問題を表すと考えられる。

3.2 通常計算式の誤差

2相流境界問題は、2流体の密度差が大きい場合に発生する。粒子を粒子間隔が等しい3次元無限正立方格子に均等配置し、左を空気、右を水として、圧力勾配と速度勾配を与えた場合について計算を行う。 h は1[m]、速度の基準値は1[m/s]、圧力の基準値は0.1[MPa]、密度は空気:1.29[kg/m³]、水:1000[kg/m³]、音速は空気: $C=330$ [m/sec]、水: $C=1400$ [m/sec]とし、図1、図2のように x 方向に

速度と圧力の1次勾配を与えた。図では気液粒子の中間位置 $x=5.5$ [m]で速度と圧力勾配が変わるとしている。なお以降の計算では核関数にはガウス関数を用い、加算範囲は $3h$ としている。

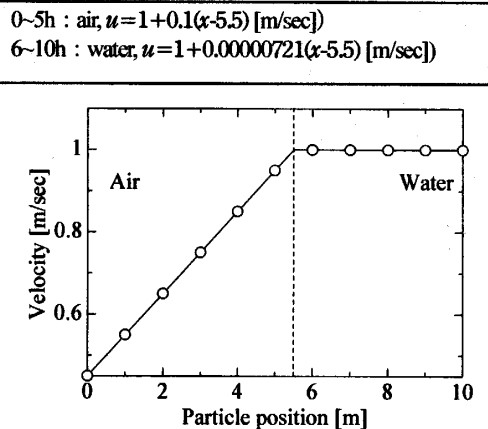


Fig. 1 Velocity distribution model

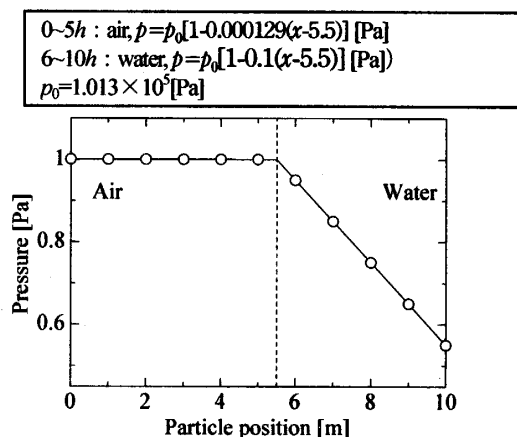
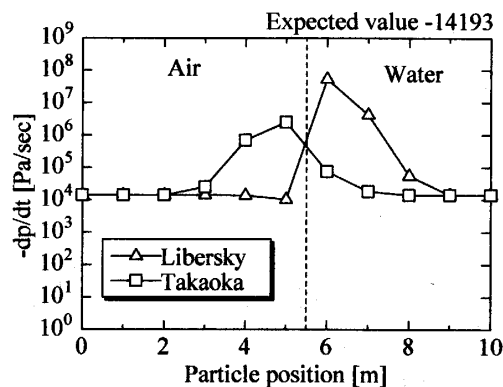


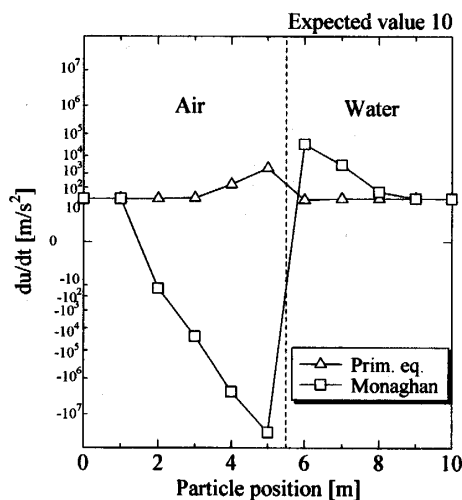
Fig. 2 Pressure distribution model

a. 圧力増加 図3はLiberskyの式、高岡の式を用い、図1のモデルについて求めた境界面近傍の dp/dt の分布を示す。 dp/dt の期待値は -14193 [Pa/s]である。式に

Fig. 3 dp/dt distribution around the boundary

よる違いがあるが、3~4桁程度の異常が見られる。

b. 加速度 単純計算式(6)と、Monaghanの式(7)について、図2のモデルで計算した結果を図4に示す。 du/dt の期待値は 10 [m/s²]である。境界面近傍で、両式ともに大きな誤差を生ずることが分かる。

Fig. 4 du/dt distribution around the boundary

4. 緩和計算式

4・1 対称計算式 我々は2相境界問題の加速度計算式として、式(7)の代わりに、別の計算式を導出し、その式から議論をスタートする。運動量保存則は、2つの独立した流体粒子の運動量変化を調べることで検証することができる。式(6)の場合、 i, j 2粒子のみが存在するとき、 j 粒子が i 粒子に与える作用力は、

$$m_i \frac{du_i}{dt} = -\frac{m_i m_j}{\rho_i \rho_j} p_j \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \quad (12)$$

であり、一方、 i 粒子が j 粒子に与える作用力は、

$$m_j \frac{du_j}{dt} = -\frac{m_i m_j}{\rho_i \rho_j} p_i \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \quad (13)$$

であるから、 i 粒子と j 粒子の相互の作用力は同じでない。従って運動量保存則は満たされない。

Monaghan等の式(7)の場合、平均化の時に h が一定であるとき、 j 粒子が i 粒子に及ぼす影響と、 i 粒子が j 粒子に及ぼす影響は、符号が反対で、同じ値となるため、運動量保存則を満たす。しかし $h_i=h_j$ が保証されない場合には運動量は保存されない。そこで別な形式の加速度計算式を導く。

今 i 位置の粒子が j 粒子によって受ける力は、加速度に質量 m_i を掛けた

$-(m_i/\rho_i)p_j(m_j/\rho_j)(\partial W_j/\partial x_i)$ である。一方 j 粒子が i 粒子によって受ける力は、

$-(m_j/\rho_j)p_i(m_i/\rho_i)(\partial W_i/\partial x_j)$ である。この力は i 粒子に反作用として作用するはずであり、その方向は逆である。上記二つの力の影響を加算したものが i 粒子に作用する力であるとすれば、 i 粒子に作用する力は

$$m_i \frac{du_i}{dt} = - \sum_j \frac{m_i m_j}{\rho_i \rho_j} \left\{ p_j \frac{\partial W_j}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \right\}$$

だから、これより、運動方程式

$$\frac{du_i}{dt} = - \frac{1}{\rho_i} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \left\{ p_j \frac{\partial W_j}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \right\} \quad (14)$$

が得られる。この式は i, j 粒子について対称であって、 $h_i \neq h_j$ でも運動量保存則が成り立つ。なお、式(14)で $h_i = h_j$ のときは、 $\partial W/\partial x_i = -\partial W/\partial x_j$ なので、

$$\frac{du_i}{dt} = - \frac{1}{\rho_i} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (p_i + p_j) \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \quad (15)$$

となる。式(15)は Monaghan が運動量を保存するとして提示した第3の式⁽¹⁾と同じになる。

式(14)は運動方程式を単純に平均化した式(6)に比べて p_i の項が余分になっている。このような余分な項が発生するのは Monaghan の式の場合も同様であるが、無限な一様空間で加算するとこの項は0になるから、もとの運動方程式と矛盾しない。ここでは式(14)を対称計算式と呼ぶ。

4・2 緩和計算式

4・2・1 圧力の計算式 1次元の場合の圧力計算式(8)を平均化した次の式を考える。

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= - \left\langle \rho C^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_i = - \left\langle \rho C^2 \frac{\partial (u - u_i)}{\partial x} \right\rangle_i \quad (16) \\ &= - \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j C_j^2 (u_j - u_i) \frac{\partial W}{\partial x} \end{aligned}$$

この計算を行うとき、気体である i 粒子と液体である j 粒子の中間の位置 x に、気液境界面があり、速度勾配が大きく変化するものとしよう。このとき dp/dt が $\rho C^2 \partial u/\partial x$ によって定まることに注目し、2つの領域に分けて式(16)の代わりに次式を用いる。

$$\frac{dp_i}{dt} = - \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} [\rho_j C_j^2 (u_j - u_x) + \rho_i C_i^2 (u_x - u_i)] \frac{\partial W}{\partial x} \quad (17)$$

すなわち、式(17)では u_j の値が圧力増加をもたらすとき、 i 粒子寄りの領域では、 i の ρC^2 値が影響し、 j 粒子寄りでは j の ρC^2 値が影響すると考えている。ここで

u_x は気液境界上の速度を示すが、境界位置 x は不明であるからこの計算はできないが、次のように考える。式(17)について考察すると、気体の ρC^2 に較べて、液体の ρC^2 は極めて大きい。他方、液体の速度差 $u_j - u_x$ は微少なはずだから、気体の速度差は、 $u_x - u_i \approx u_j - u_i$ となり、残りの微少な速度差 $u_j - u_x$ が液体の影響をもたらす。従って、液体の ρC^2 は極めて大きい、液体の影響のみが突出して大きくなることは考えにくく、液体の影響は気体の影響と同程度のオーダーであると推察される。そこで液体の影響が気体の影響と同一であると仮定し、

$$\rho_i C_i^2 [u_x - u_i] = \rho_j C_j^2 [u_j - u_x] \quad (18)$$

とする。式(18)から u_x が定まるから、それを代入して式(17)を変形し、3次元に拡張すると

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= - \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{2\rho_i C_i^2 \rho_j C_j^2}{\rho_i C_i^2 + \rho_j C_j^2} \left\{ [u_j - u_i] \frac{\partial W}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + [v_j - v_i] \frac{\partial W}{\partial y} + [w_j - w_i] \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

が得られる。これが圧力についての提案式である。

4・2・2 運動方程式 加速度計算式(14)を次のように変形する。

$$\frac{du_i}{dt} = - \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \left\{ \frac{p_i}{\rho_i} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_i} - \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \right) + \frac{p_j - p_i}{\rho_i} \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right\} \quad (20)$$

圧力の式の場合と同様にして、粒子 i, j の中間位置 x に気液境界があるものとして、式(20)の第2項を2つの領域に分けて

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= - \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \left\{ \frac{p_i}{\rho_i} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_i} - \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{p_x - p_i}{\rho_i} + \frac{p_j - p_x}{\rho_j} \right) \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

と置く。 p_x は未知である。圧力の式の場合と同様の議論で、

$$\frac{p_x - p_i}{\rho_i} = \frac{p_j - p_x}{\rho_j} \quad (22)$$

と置いて、 p_x を求め、式(21)に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{du_i}{dt} = - \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \left\{ \frac{p_i}{\rho_i} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_i} - \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \right) + 2 \frac{p_j - p_i}{\rho_i + \rho_j} \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \right\} \quad (23)$$

これが加速度についての提案式である。この式は $h_i = h_j$ の条件では運動量保存則を満たすが、この条件が成り立たないときには運動量保存則を満たさない。この問題は次報で議論する。

空気-水の2相境界面近傍で、3次元正立方格子上に粒子を配列し、図1、図2の速度分布、圧力分布のもとに、式(19)と式(23)を用いた場合の dp/dt , du/dt の計算結果を図5、図6に示す。図3、図4と比較すると、境界近傍の粒子の異常値が、10%程度の誤差に改善されることが分かる。

境界位置を左右粒子に近づけると誤差は増すが、20%程度であった。以上のように完全ではないが2相流境界の誤差が緩和されるため、これらの式を緩和計算式(Relaxation equations)と呼ぶ。

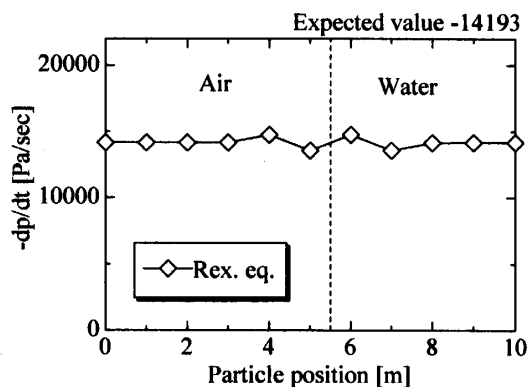


Fig.5 dp/dt distribution around boundary of 2phase flow, in case of Rex. equation

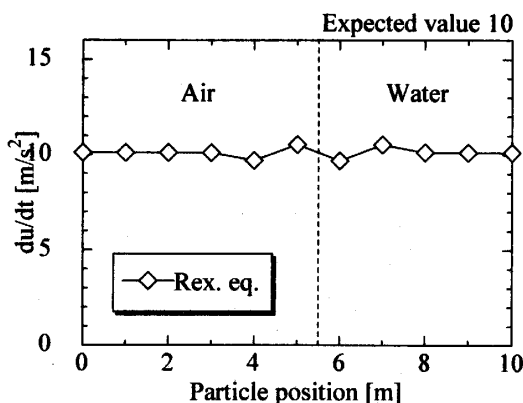


Fig.6 du/dt distribution around boundary of 2phase flow, in case of Rex. equation

5. 数値計算例

緩和計算式を用いて図7のモデルについて数値計算を行った。左側に圧力0.1 [MPa]の5層の空気粒子、右側に圧力0 [Pa]の25層の水粒子を配置し、 $h=0.1$ [m],

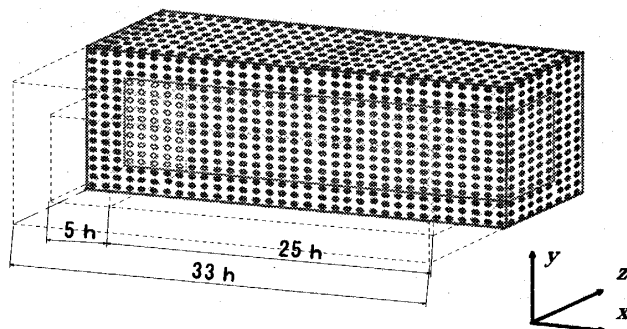


Fig.7 Three dimensional analyzed model

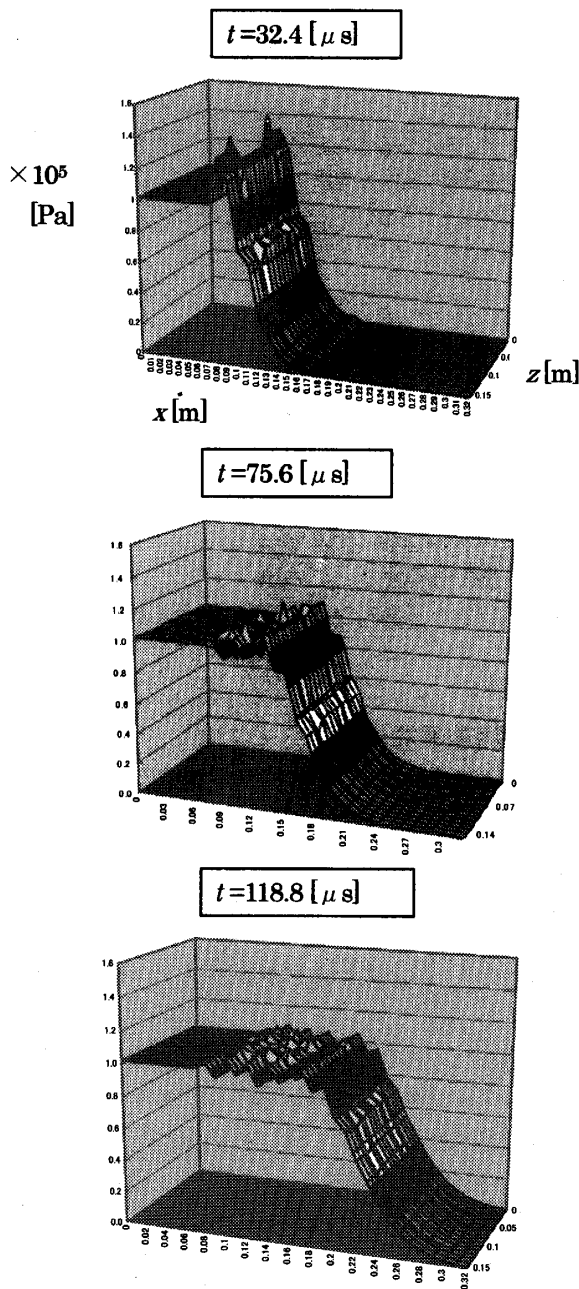


Fig.8 Analyzed pressure distribution by Relaxation equations for model of Fig.7

(plane : $y=0.07$ [m], rigid wall : $x=0-0.02$ [m],
air $x=0.03-0.07$ [m], water : $x=0.08$ [m]~)

右端開放とした。右端以外の周囲には3層の固定粒子を配置している。空気は断熱変化するものとする。解析は陽解法であるが、時間についてルンゲクッタギル法を用いた。人工粘性項は用いていない。固定粒子の圧力と速度には x 断面の圧力、速度の平均値を与えている。本来、固定粒子は空気粒子か、水粒子としてもよいが、ここでは緩和計算式の可能性を判断するため、あえて鉄の密度を与えている。

従来の SPH 法の式、式(4)及び式(7)では境界近傍の数値異常が大きくなり、クーラン数を 1/10 にしても解析はできなかった。緩和計算式ではクーラン数 1 で解析可能であったがここでは 0.5 とした。図 8 は緩和計算式を用いた場合の圧力の数値計算結果を示す。本来ステップ状の圧力波が伝播するはずであるが、解析結果では圧力波形状がなまっている。1 流体で同一粒子径の場合に、緩和計算式(19)は従来計算式(4)を圧力計算式に直した式に一致し、式(20)は式(15)と一致するから、数値拡散の原因が緩和計算式とは思われない。ルンゲクッタギル法を用いたことなども一因と考えられる。図 8 の空気の圧力は一様であるが、水の圧力波頭に x 方向、 z 方向乱れが見られる。 x 方向の乱れは空気と水の物性値の違いに起因する。また z 方向の乱れは壁の密度に鉄の密度を用いたためである。緩和計算式は図 1、図 2 の準定常流れのために導いた式であるが、その条件が成り立たないこのような衝撃波問題にも適用可能であることが分かる。

6. 結論

SPH 法の 2 相流れにおける 2 流体境界の数値異常を緩和するため、非粘性流体の緩和計算式を提案し、3 次元正立方格子上に粒子を配置した場合について、これらの式を用いて解析し、数値異常が緩和され、計算可能になることを示した。

参考文献

- (1) J. J. Monaghan : Particle Methods for Hydrodynamics, Computer Physics Reports 3, 71-124 (1985)
- (2) L. D. Libersky, A. G. Petschek, T. C. Carney, J. R. Hipp, F. A. Allahdadi: High strain Lagrangian Hydrodynamics, Journal of Computer Physics, 109, 67-75 (1993)
- (3) Hidetoshi Takaoka, Kimiya Komurasaki and Toshi Fujiwara: Numerical Simulation on Multiphase Deformation Caused by a Hyper-Velocity Impact, Trans. of JSASS, Vol.45, No.522, 371-379(1997)
- (4) S. Hiermaier, D. Konke, A. J. Stilp, K. Thoma: Computational Simulation of the Hypervelocity Impact of Al-Spheres on Thin Plates of Different Materials, Int. J. of Impact Engng, Vol.20, 363-374 (1997)
- (5) G. R. Liu : Mesh Free Method, pp.366, CRC Press, 2003