無衝突プラズマ中の非線形アルフェン波

川田　勉・坂井　純一

緒　　言

一様な外部磁場中の無衝突プラズマ内に誘起される磁気流体波（低周波振動波）は，天体プラズマのみならず核融合プラズマにおいても重要であり，特にアルフェン波は天体的スケールで伝播し興味深い。近年，それらの非線形性を考慮した一次元伝播問題が，谷内等[1〜4]により系統的に扱われた。それによれば，磁気流体波を構成する２種の波，磁気音波とアルフェン波は，それぞれ Korteweg de-Vries(KdV) 方程式と変形KdV方程式という単一の非線形方程式に帰着される[3,4]。これらの扱いでは，波の伝播方向は磁場の方向と一致せずにある一定角 φ をなすものとされた。線形理論によれば，アルフェン波は殆んど磁場方向に伝播する。この平行伝播における非線形的な扱いは，まず Rogister,[5] 次いで川原,[6] Mjolhus[7]によって行われ，微分形非線形シュレディンガー方程式（Derivative Nomlinear Shrödinger 略して DOLS eg.）が導出された。DNLS 方程式の弧立波解（Solitary Wave Solution）は，Mjolhus[8]によって与えられた。又，数値解析によって平面波的な初期値の変化が調べられたが,[9] 適当な条件において通常の分散性媒質中の波動にはみられないショック波的な"つっ立ち"が生じた。一方，市川等[10]は，平面波的な境界条件で現われる弧立波を調べ，それは鋭いパルス的なもの（"Spiky Soliton"）になりうることを示した。さて，一連の非線形発展方程式の正確解，特に Soliton 解を与えるいくつかの数理的な手法[11]が開発され，それに伴って物理学に広く適用された。特に逆散乱法[11,12]は，非線形発展方程式の初期値問題を解くのに効力を発揮する。無限遠方で解が速やかに消失する境界条件のもとでのDNLS 方程式の解法は，Kaup と Newell[13]によって与えられた。一方，拡張された境界条件，無限遠方で解が定数，更には平面波に近づくケース，での逆散乱法による解法は，川田等[14〜16]によって与えられた。特に平面波形境界条件を課した時[16]には，市川等[10]の指摘した Spiky Soliton の存在が解析的に示された。

本文は，まず温度を考慮した磁気流体近似による一次元伝播の基礎方程式を与える。次いで線形近似を行って分散式を求め従来のものと比較する。更にマルチスケーリングによって摂動を行い平行伝播する有限微小振巾波の非線形的な振舞を記述するDNLS方程式を求める。この方程式は従来のものと異った係数を持っており，音速 c_s とアルフェン速度 v_A の比 $\beta(=c_s/v_A)$ が１に付づくと共鳴現象が生じることを示す。可能な境界条件が吟味され，（ i ）定数形境界条件と（ ii ）平面波形境界条件の２種の存在が明かにされる。最後に逆散乱法の結果を使って Soliton 解の性質が論じられる。

１．一次元伝播の基礎方程式[1,3]

プラズマを構成する粒子，電子とイオン（質量を m_e, m_i, 電荷を e とする）が理想気体と見倣せるとし成立つ方程式を以下に列挙しよう。密度，速度（ベクトル）を $n_{e,i}$, $\boldsymbol{v}_{e,i}$ とすれば，まず粒子の発生，消滅を無視して，連続の方程式が成立つ。

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \boldsymbol{v}_e) = 0, \tag{1.1a}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \boldsymbol{v}_i) = 0. \tag{1.1b}$$

ここに$\nabla \equiv \boldsymbol{i}\,\partial/\partial x + \boldsymbol{j}\,\partial/\partial y + \boldsymbol{k}\,\partial/\partial z$である。粒子の運動は，電磁場$E$, Bによるローレンツ力と圧力勾配による力で決められる。つまり電子，イオンの圧力をP_e，P_iとすれば，次の運動方程式が成立つ。

$$m_e \frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt} = -e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{B}\right) - \frac{1}{n_e}\nabla P_e, \tag{1.2a}$$

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}\right) - \frac{1}{n_i}\nabla P_i. \tag{1.2b}$$

cは光速度，$d/dt + \boldsymbol{v}_{e,i} \cdot \nabla$である。Maxwell方程式は次のようになる。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1.3a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c}(n_i \boldsymbol{v}_i - n_e \boldsymbol{v}_e). \tag{1.3b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi e (n_i - n_e), \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{1.3c}$$

プラズマが電気的に準中性（$n = n_i \cong n_e$）であり，又系に生じる振動がゆっくりしていれば変位電流が無視でき（$\partial \boldsymbol{E}/\partial t \cong 0$），上述の３ヶの方程式から電場$E$と速度$\boldsymbol{v}_e$が消去できる。運動方程式とMaxwell 方程式は，$\tilde{\boldsymbol{v}} = -(c/4\pi m e)\nabla \times \boldsymbol{B}$として次のようになる。

$$(m_e + m_i)\left(\frac{\partial}{\partial t} + [\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla]\right)\boldsymbol{v}_i + m_e\left\{[\tilde{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla]\boldsymbol{v}_i + \tilde{\boldsymbol{v}}) + \left(\frac{\partial}{\partial t} + [\boldsymbol{v}_i \cdot \nabla]\right)\tilde{\boldsymbol{v}}\right\} =$$

$$= -\frac{e}{c}\tilde{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{n}\nabla(P_e + P_i), \tag{1.4}$$

$$m_i \nabla \times \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{e}{c}\nabla \times (\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{B}) - \nabla \times \left(\frac{1}{n_i}\nabla P_i\right). \tag{1.5}$$

(1.16)，(1.4)，(1.5)式は，３ヶの変数（$n = n_i$, $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{B}$）に関し閉じている。以下，n, $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{B}$は，x軸放向にだけ変化するとする。ベクトル$\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{B}$の成分を，

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{i}u + \boldsymbol{j}v_y + \boldsymbol{k}v_z, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}B_x + \boldsymbol{j}B_y + \boldsymbol{k}B_z,$$

と表すと，まず連続の式(1.16)は，

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0, \tag{1.6}$$

となる。$\tilde{v}$はx一成分を持たない事に注意する。$\tilde{v} = (0, \tilde{v}_y, \tilde{v}_z)$として，(1.4)式は

$$(m_e + m_i)\frac{du}{dt} = \frac{e}{c}(\tilde{v}_z B_y - \tilde{v}_y B_z) - \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x}(P_e + P_i), \tag{1.7a}$$

$$(m_e + m_i)\frac{dv_y}{dt} + m_e\frac{d\tilde{v}_y}{dt} = -\frac{e}{c}\tilde{v}_z B_x, \tag{1.7b}$$

$$(m_e + m_i)\frac{dv_z}{dt} + m_e\frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{c}\tilde{v}_y B_x \ , \tag{1.7c}$$

となる。ここに $d/dt \equiv \partial/\partial t + u\ \partial/\partial x$, 又 $\tilde{v}_y$, $\tilde{v}_z$ は次のようである。

$$\tilde{v}_y = \frac{c}{4\pi ne}\frac{\partial B_z}{\partial x}, \qquad \tilde{v}_z = -\frac{c}{4\pi ne}\frac{\partial B_y}{\partial x} \ . \tag{1.8}$$

(1.5)式を書き下そう。

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \ , \tag{1.9a}$$

$$m_i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv_y}{dt}\right) = -\frac{e}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x}(v_z B_x - uB_z) \ , \tag{1.9b}$$

$$-m_i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv_z}{dt}\right) = -\frac{e}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x}(v_y B_x - uB_y) \ . \tag{1.9c}$$

(1.3c)式の $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ と(1.9a)式により，B_x は $(x-t)$ に関し定数となることに注意しておこう。(1.8a)式右辺第2項の圧力項は，プラズマが理想気体の状態方程式.

$$P_e = nT_e, \quad P_i = nT_i \ , \tag{1.10}$$

に従うものとする。ここに T_e，T_i はそれぞれ電子，イオンほ温度であり，当然 $(x-t)$ に依存しない。以上を整理して，次の一次元伝播の基礎方程式にいたる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0, \tag{1.11a}$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{1}{4\pi(m_i + m_e)}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B_y^2 + B_z^2}{2}\right) + \frac{T_e + T_i}{m_e + m_i}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial n}{\partial x} = 0 \ , \tag{1.11b}$$

$$\frac{dv_y}{dt} - \frac{1}{4\pi(m_i + m_e)}\frac{B_x}{n}\cdot\frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{m_e c}{4\pi(m_i + m_e)e}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = 0, \tag{1.11c}$$

$$\frac{dv_z}{dt} - \frac{1}{4\pi(m_i + m_e)}\frac{B_x}{n}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{m_e c}{4\pi(m_i + m_e)e}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial B_y}{\partial x}\right) = 0, \tag{1.11d}$$

$$\frac{dB_y}{dt} + B_y\frac{\partial u}{\partial x} - B_x\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{m_i c}{e}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv_z}{dt}\right) = 0, \tag{1.11e}$$

$$\frac{dB_z}{dt} + B_z\frac{\partial u}{\partial x} - B_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{m_i c}{e}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv_y}{dt}\right) = 0. \tag{1.11f}$$

2．線形理論と分散式

プラズマに固有なパラメーターを導入して，基礎方程式（1.11）の無次元化を行う。一様な磁場 $\boldsymbol{B}_c$ と密度 n_c によって特徴づけられるプラズマ中の波動を考える。一次元（x 一方向）伝播を扱うので，一般性を失わずに $\boldsymbol{B}_c = i\,B_{xc} + j\,B_{yc}$ として良いことに注意しよう。$B_c = |\boldsymbol{B}_c|$ とすれば，$B_{xc} = B_c \cdot \cos\varphi$，$B_{yc} = B_c \sin\varphi$ と書ける。ここに φ は，外部磁場 $\boldsymbol{B}_c$ と波の伝播方向のなす角度である。良く知られなプラズマ・パラメーター；アルフェン速度 v_A，音速 c_s，電子及びイオンのサイクロトロン周波数 ω_{ce}, ω_{ci} は次式で与えられる。

$$v_A^2 = \frac{B_c^2}{4\pi(m_i + m_e)n_c}, \qquad c_s^2 = \frac{T_i + T_e}{m_i + m_e}, \qquad \omega_{ce} = \frac{eB_c}{m_e c}, \qquad \omega_{ci} = \frac{eB_c}{m_i c}. \tag{2.1}$$

密度，速度，磁場をそれぞれ n_c，v_A，B_c で規格化し，それらにはプライムを付ける。又時空変数に対しても，特性パラメーター ω_c を考えて，$t' = \omega_c t$, $x' = (\omega_c / v_A) x$ なる無次元化を行う。改めて，プライムを取れば，(1.11)式は以下のようになる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0, \tag{2.2a}$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{n}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B_y^2 + B_z^2}{2}\right) + \frac{\beta^2}{n}\cdot\frac{\partial n}{\partial x} = 0, \tag{2.2b}$$

$$\frac{dv_y}{dt} - \frac{B_x}{n}\frac{\partial B_y}{\partial x} + \alpha_e \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = 0, \tag{2.2c}$$

$$\frac{dv_z}{dt} - \frac{B_x}{n}\frac{\partial B_z}{\partial x} - \alpha_e \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial B_y}{\partial x}\right) = 0, \tag{2.2d}$$

$$\frac{dB_y}{dt} + B_y\frac{\partial u}{\partial x} - B_x\frac{\partial v_y}{\partial x} - \alpha_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv_z}{dt}\right) = 0, \tag{2.2e}$$

$$\frac{dB_z}{dt} + B_z\frac{\partial u}{\partial x} - B_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + \alpha_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv_y}{dt}\right) = 0. \tag{2.2f}$$

但し，$d/dt \equiv \partial/\partial t + u\partial/\partial x$, $\beta = c_s/v_A$, $\alpha_{i\,e} = \omega_c/\omega_{i\,e}$。簡便のため6元列ベクトル $U = (n,\ u,\ v_y,\ v_z,\ B_y,\ B_z)$ を使おう。(2.2)式の定数解が，プラズマを特徴づけるべきである。B_x は常に一定であることと，先程触れた外部一様磁場の設定より，次の定数解を取らねばならない。

$$U_c = (1,\ u_c,\ v_{yc},\ v_{zc},\ \sin\varphi,\ 0), \quad B_{xc} = \cos\varphi. \tag{2.3}$$

この定数解近傍で(2.2)式を線形化して得られる波動は，外部磁場に角度 φ をなして伝播する。$U(x, t) = U_c + \tilde{U}(x, t)$ を(2.2)式に代入すれば，次の定数係同次線形方程式を得る。

$$L(d_t,\ \partial_x)\,\tilde{U}(x,\ t) = 0, \tag{2.4}$$

ここに，$\partial_x \equiv \partial/\partial x$, $d_t \equiv \partial/\partial t + u_c\,\partial/\partial x$, 又 $L(d_t,\ \partial_x)$ は行列演算子で以下に与えられる。

$$L(d_t,\ \partial_x) = \left[\begin{array}{cc:cccc} \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{$L_s(d_t, \partial_x)$}} & 0, & 0, & 0, & 0 \\ & & 0, & 0, & \sin\varphi\cdot\partial_x, & 0 \\ \hdashline 0, & 0 & & & & \\ 0, & 0 & & \multicolumn{2}{c}{L_A(d_t,\ \partial_x)} & \\ 0, & \sin\varphi\cdot\partial_x & & & & \\ 0, & 0 & & & & \end{array}\right]$$

$$L_s(d_t, \partial_x) = \begin{bmatrix} d_t, & \partial_x \\ \beta^2\partial_x, & d_t \end{bmatrix}, \quad L_A(d_t, \partial_x) = \begin{bmatrix} d_t, & 0, & -\cos\varphi\cdot\partial_x, & \alpha_e d_t \partial_x \\ 0, & d_t, & -\alpha_e d_t \partial_x, & -\cos\varphi\cdot\partial_x \\ -\cos\varphi\cdot\partial_x, & -\alpha_i \partial_x d_t, & d_t, & 0 \\ \alpha_i \partial_x d_t, & -\cos\varphi\cdot\partial_x, & 0, & d_t \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

$U(x, t) = \tilde{U}_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ を(2.4)式に代入する。零ならざる定数ベクトル $\tilde{U}_0$ が存在するには，波数 k と周波数 ω は次の関係，つまり分散式を満たさねばいけない。

$$\det L(-i\tilde{\omega},\ ik) \equiv D(\tilde{\omega},\ k) = 0. \quad (\tilde{\omega} = \omega - u_c k) \tag{2.6}$$

これは，次のように計算される。

$$D(\tilde{\omega},k)\equiv D_s(\tilde{\omega},k)D_A(\tilde{\omega},k)-\sin^2\varphi\, D_{int}(\tilde{\omega},k)=0, \tag{2.7}$$

ここに，$D_{s,A}=\det\ L_{s,A}$等は以下に示すとおりである。

$$\begin{cases} D_s(\tilde{\omega},k)=\beta^2k^2-\tilde{\omega}^2,\ D_{int}=\tilde{\omega}^2k^2(\tilde{\omega}^2+\alpha_e\alpha_i\tilde{\omega}^2k^2+\cos^2\varphi\cdot k^2), \\ D_A(\tilde{\omega},k)=(1+\alpha_e\alpha_ik^2)^2\tilde{\omega}^4-2\cos^2\varphi\cdot\left\{1+\frac{1}{2}(\alpha_e^2+\alpha_i^2)k^2\right\}k^2\tilde{\omega}^2+\cos^4\varphi\cdot k^4. \end{cases} \tag{2.8}$$

(2.8)

分散式は$k-\tilde{\omega}$平面の第一象限に限れば充分である。$\varphi\neq 0$では，2ヶのモード；磁気音波，アルフェン波，が存在する，特に平行伝播（$\varphi=0$）では，$D_s(\tilde{\omega},k)=0$と$D_A(\tilde{\omega},k)=0$に分解される。前者は純粋な音波に帰着され，一方後者は更に因数分解される。

$$D_A(\tilde{\omega},k)=D_R(\tilde{\omega},k)\cdot D_L(\tilde{\omega},k)=0, \tag{2.9}$$

$$D_R(\omega,k)=(1+\alpha_i\alpha_ek^2)\omega^2+(\alpha_i-\alpha_e)k^2\omega-k^2,$$

$$D_L(\omega,k)=(1+\alpha_i\alpha_ek^2)\omega^2+(\alpha_e-\alpha_i)k^2\omega-k^2\ .$$

この事は，アルフェン波が更に2種のモードに分解されることを意味する。$\alpha_i\gg\alpha_e$に注意すれば，$k-\tilde{\omega}$面の原点付近で，$D_R(\tilde{\omega},k)=0$及び$D_L(\tilde{\omega},k)=0$は，それぞれ次のように近似される。

$$\omega/k\cong 1+(\alpha_i-\alpha_e)k/2\ ,\qquad \omega/k\cong 1-(\alpha_i-\alpha_e)k/2\ . \tag{2.10}$$

これは良く知られた平行伝播のアルフェン波の分散式である。この2種の波の物理的相違を調べるために，(2.4)式を平行伝播に設定し，磁場成分（$\tilde{B}_y$, $\tilde{B}_z$）のみを未知変数とする形に直す。改めて，（$\tilde{B}_y$, $\tilde{B}_z$）=（$\tilde{B}_{y0}$, $\tilde{B}_{z0}$）$\exp[i(kx-\omega t)]$を代入すると，

$$\begin{pmatrix}(1-\alpha_e\alpha_i\tilde{\omega}^2)-\tilde{\omega}^2, & i(\alpha_e-\alpha_i)k^2\tilde{\omega} \\ i(\alpha_e-\alpha_i)k^2\tilde{\omega}, & (1-\alpha_e\alpha_i\tilde{\omega}^2)-\tilde{\omega}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{B}_{y0}\\ \tilde{B}_{z0}\end{pmatrix}=0, \tag{2.11}$$

が得られる。これより$i\tilde{B}_{y0}/\tilde{B}_{z0}$を求めることができる。分散式$D_R(\tilde{\omega},k)=0$と$D_L(\tilde{\omega},k)=0$に対応してそげぞれ，$i\tilde{B}_{y0}/\tilde{B}_{z0}=+1,-1$となる（これには必ずしも$k$が小さくなくても良い)。従って,分散式$D_R(\tilde{\omega},k)=0$には右円偏波，$D_L(\tilde{\omega},k)=0$には左円偏波となる波が対応する。

3．摂動論と微分形非線形シュレディンガー方程式[4,6]

マルチ・スケーリングによって（2.2)式を摂動展開して，平行伝播の非線形理論を与える。まず（2.2)式を，少し修正しておく。

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(nu)=0, \tag{3.1a}$$

$$\frac{du}{dt}+\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{|B|^2}{2}\right)+\frac{\beta^2}{n}\frac{\partial n}{\partial x}=0, \tag{3.1b}$$

$$\frac{dv}{dt}-\frac{1}{n}\frac{\partial B}{\partial x}-i\alpha_e\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial B}{\partial x}\right)=0, \tag{3.1c}$$

$$\frac{dB}{dt}-\frac{\partial v}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial x}+i\alpha_i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv}{dt}\right)=0. \tag{3.1d}$$

ここに v, B は複素変数，$v=v_y+iv_z$，$B=B_y+iB_z$，である。小さなパラメーター ϵ で，

$$n=1+\epsilon n^{(1)}+\cdots\cdot,\quad u=u^{(0)}+\epsilon u^{(1)}+\cdots\cdot,$$

$$v=\epsilon^{½}(v^{(1)}+\epsilon v^{(2)}+\cdots\cdot),\qquad B=\epsilon^{½}(B^{(1)}+\epsilon B^{(2)}+\cdots\cdot), \tag{3.2}$$

と展開しておく。又，独立変数 (x, t) を次のようにスケーリングする。

$$\xi=\epsilon(x-ct),\qquad \tau=\epsilon^2 t. \tag{3.3}$$

この時，各微分演算子は以下のように変換する。

$$\frac{\partial}{\partial t}=-c\epsilon\frac{\partial}{\partial\xi}+\epsilon^2\frac{\partial}{\partial\tau},\qquad \frac{\partial}{\partial x}=\epsilon\frac{\partial}{\partial\xi},$$

$$\frac{d}{dt}=\epsilon(u^{(0)}-c)\frac{\partial}{\partial\xi}+\epsilon^2\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+u^{(1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\cdots\cdots. \tag{3.4}$$

(3.2)，(3.4)式を(3.1)式に代入して，ϵ のベキを比較すれば次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\lambda n^{(1)}+u^{(1)})=0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\lambda u^{(1)}+\frac{1}{2}|B^{(1)}|^2+\beta^2 n^{(1)}\right)=0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\lambda v^{(1)}-B^{(1)})=0, \tag{3.7a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+u^{(1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)v^{(1)}+n^{(1)}\frac{\partial B^{(1)}}{\partial\xi}-i\lambda\alpha_e\frac{\partial^2 B^{(1)}}{\partial\xi^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}(B^{(2)}-\lambda v^{(2)}), \tag{3.7b}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\lambda B^{(1)}-v^{(1)})=0, \tag{3.8a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+u^{(1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)B^{(1)}+B^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi}+i\lambda\alpha_i\frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial\xi^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}(v^{(2)}-\lambda B^{(2)}). \tag{3.8b}$$

ここで，$\lambda=u^{(0)}-c$ である。(3.7a)，(3.8a)式は，$\lambda^2=1$でないと背理を生む。以下，$\lambda=-1$とし(3.7b)，(3.8b)より $B^{(2)}$，$v^{(2)}$を消去する。肩の添字$^{(1)}$を落してしまうと，(3.5)，(3.6)，(3.7a)式は，次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(u-n)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(u-\beta^2 n-\frac{1}{2}|B|^2\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}(v+B)=0. \tag{3.9}$$

(3.7b)，(3.8b) 式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(v-B)-\frac{\partial}{\partial\xi}(uB)+(n-u)\frac{\partial B}{\partial\xi}+i(\alpha_e-\alpha_i)\frac{\partial^2 B}{\partial\xi^2}=0. \tag{3.10}$$

(3.9)，(3.10)式は広いクラスの解を含んでいる。それは $(n,\ u,\ v,\ B)$ の $\xi\to-\infty$ の境界条件によって区別される。解の有界性から，正弦波に振動する条件，平面波形境界条件が最も一般性がある。

そこで B_e, B_0 を複素定数として，$B(\xi,\ \tau)$ に対する次の境界条件を仮定しよう。

$$B(\xi,\ \tau)\rightarrow B_e \exp\left[i(k\xi-\omega\tau)\right]+B_0,\ \xi\rightarrow-\infty. \tag{3.11}$$

$\beta^2\neq 1$ ならば，(3.9)式より n, u を B で表わせるが，B_e と B_0 が共に零でない時，n, u の境界値も振動する。しかし(3.10)式によれば，左辺第2項の非線形効果から第2高調波が発生して背理を生む。従って，(3.11)式においては以下の3種のケースが可能となる；(i)$B_e=B_0=0$(消失形境界条件), (ii)$B_e=0$, $B_0\neq 0$ (定数形境界条件), (iii)$B_e\neq 0$, $B_0=0$(平面波形境界条件)。この3種の境界条件は，B_e, k, ω が零になりうるとすれば，改めて次の様にかける。

$$B(\xi,\ \tau)\rightarrow B_e \exp\left[i(k\xi-\omega\tau)\right],\quad \xi\rightarrow-\infty\ . \tag{3.12}$$

この時，k, ω には後で示すが条件が付加され，$k\rightarrow 0$ では $\omega\rightarrow 0$ となる。それで，n, u は $\xi\rightarrow-\infty$ で定数に近付く，つまり $n\rightarrow n_0$, $u\rightarrow u_0$. 実際 (3.9) 式を積分して次の形を得る。

$$n=\frac{1}{2(1-\beta^2)}(\ |B|^2-|B_e|^2)+n_0,\quad u=\frac{1}{2(1-\beta^2)}(\ |B|^2-|B_e|^2)+u_0,\quad v=-B+v_0. \tag{3.13}$$

これを (3.10) 式に代入すれば，B に関する単一の非線形偏微分方程式が得られる。

$$i\frac{\partial B}{\partial\tau}+\frac{\alpha_e-\alpha_i}{2}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial\xi^2}+\frac{i}{4(1-\beta^2)}\frac{\partial}{\partial\xi}\{(\ |B|^2-|B_e|^2)B\}=-\frac{i}{2}(2u_0-n_0)\frac{\partial B}{\partial\xi}\ . \tag{3.14}$$

これは，微分形非線形シュレディンガー方程式 (DNLS eg.) と呼ばれねいる。所で境界条件(3.12)は，DNLS 方程式においても満たされていないといけない。(3.12) 式を(3.14)式に適用することによって，先程触れた ω, k の関係式，分散式が求まる。

$$\frac{\omega}{k}=-(u_0-\frac{1}{2}n_0)+\frac{\alpha_e-\alpha_i}{2}k\ . \tag{3.15}$$

線形理論にもれば (例えば(2.10)式を見よ)，右円偏波の位相速度 ($=\omega/k$) は，ドップラ効果を除けばアルフェン速度より弱大きく，左円偏波の方は弱小さい。(3.15)式で u_0, n_0 を落せば，その位相速度は，$\lambda=u^{(0)}-c=-1$ とした事と(3.3)式のスケール変換を考慮して，アルフェン速度より小さいことがわさる。故に，(3.14)式の記述する $B=B_y+iB_z$ は，左円偏波の非線形な振舞を与える。それに対して，$B=B_y-iB_z$ についての方程式も同様に導出できる。結果的には(3.10)式以降において α_i, α_e を交換すれば，右円偏波を記述する方程式になる。

(3.14)式は，音波の寄与 $(1-\beta^2)^{-1}$ を含んでいる。アルフェン速度と音速が近付くと，両者の相互作用が累積的に増大する (共鳴相互作用) ことを示している。(3.9)式より明かなごとく，$\beta=1$ では，B と n, u の関係が定まらない。これは今後に残された興味深い問題である。

4. Soliton 解について[16)]

(3.14)式の従属変数，独立変数を(3.1)式における B と x, t に還元するのは容易である。簡単のため，プラズマ密度の摂動と伝播方向への速度の摂動が遠方で消失するとし，アルフェン速度で動く座標系を取ると，(3.12), (3.14) 式は次式に帰着される。

$$i\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\alpha_i-\alpha_e}{2}\cdot\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}+\frac{i}{4(1-\beta^2)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\{(\ |B|^2-|\widetilde{B}^-|^2)B\}=0\ , \tag{4.1a}$$

$$B(x,t)\to\widetilde{B}^{-}\exp\left[i(kx-\omega t)\right],\quad x\to-\infty\ . \tag{4.1b}$$

但し，(k,ω) は次の分散式に従う。

$$\omega/k=(1/2)(\alpha_i-\alpha_e)k\ . \tag{4.2}$$

これらは左円偏波に対するものであるが，α_i と α_e の互換より右円偏波に対する表示となる。ここで注意すべき点として，(4.1a)式は時間に関し一階であるので，その初期値 $B(x,0)$ を与えれば，解は一意的に定まる。しかし，この x の変域は $(-\infty,\ \infty)$ であるから，$B(x,0)$ の $x\to\pm\infty$ の振舞が，この種の初期値問題の解の存在性を左右する。所で(4.1b)式に対応して $x\to+\infty$ の条件も指定せねばならない。(3.11)式以降に行った考察を $x\to\infty$ の境界条件に修正する。(4.1b)式に対して，

$$B(x,t)\to\widetilde{B}^{+}\exp\left[i(k^{+}x-\omega^{+}t)\right],\quad x\to\infty\ , \tag{4.3}$$

を得る。(k^{+},ω^{+}) は(4.2) 式と同じ分散式に従う。$|B^{+}|=|B^{-}|$，$k=k^{+}$の時，かかる初期値問題は，逆散乱法の意味で可解となる。以下にこのケースを扱う。次の変数変換を導入する。

$$B(x,t)=\widetilde{B}(X,T)\exp\left[i(kx-\omega t)\right],\quad X=x-(\alpha_i-\alpha_e)kt,\quad T=(1/2)(\alpha_i-\alpha_e)t. \tag{4.4}$$

これにより問題は，定数形境界条件についての形に変換される。

$$i\frac{\partial\widetilde{B}}{\partial T}+\frac{\partial^2\widetilde{B}}{\partial X^2}-miQ\frac{\partial}{\partial X}\{(|\widetilde{B}|^2-|\widetilde{B}^{\pm}|^2)\widetilde{B}\}+2mR^2(|\widetilde{B}|^2-|\widetilde{B}^{\pm}|^2)\widetilde{B}=0, \tag{4.5a}$$

$$\widetilde{B}(X,T)\to\widetilde{B}^{\pm},\quad X\to\pm\infty\ \text{（複号同順）}. \tag{4.5b}$$

ここに $m=\pm1$，又 Q, R^2 は正数である。

$$Q=-\frac{m}{2(\alpha_i-\alpha_e)(1-\beta^2)},\qquad R^2=-\frac{mk}{4(\alpha_i-\alpha_e)(1-\beta^2)}. \tag{4.6}$$

Q, R^2 が正だから，m は $(\alpha_i-\alpha_e)(\beta^2-1)$ の符号，つまり $m=\mathrm{sgn}\{(\alpha_i-\alpha_e)(\beta^2-1)\}$ と考えて良い。(4.5a)式は，DNLS 方程式の非線形項と通常の非線形シュレディンガー方程式の非線形項を持っているので複合形非線形シュレディンガー方程式（Mixed Nonlinear Schrödinger, MNLS eg.）と呼ぶ。それの逆散乱法による解法と Soliton 解は，筆者等によって与えられた。[16] ここでは代表的な定常 Soliton 解を示すにとどめる。特に $m=1$ のケースでは，

$$|\widetilde{B}(X,T)|^2=|\widetilde{B}^{\pm}|^2\left\{1+\frac{H}{\varepsilon\cosh[W^{-1}(X-VT)-\phi]-\sin\Theta}\right\}, \tag{4.7a}$$

$$|\widetilde{B}^{\pm}|^2=4(R/Q)^2\cosh^2\phi,\qquad V=-4m(R^2/Q)e^{\theta}\cosh\theta,$$

$$H=4\sin\Theta\cdot\cos^2\Theta\cdot\chi,\quad W^{-1}=2Q|\widetilde{B}^{\pm}|^2\sin\Theta\cdot\cos\Theta\cdot\chi,\quad \chi=\frac{e^{\theta}}{2\sinh\theta}\left(\frac{\sinh\phi}{\cosh\phi}\right)^2, \tag{4.7b}$$

正数 ϕ は境界条件で定まるが，$\theta(|\theta|<\phi)$，$\psi(-\infty<\psi<\infty)$ 及び $\varepsilon(=-1$ 又は $1)$ はスペクトル・パラメーターと称される定数である。[16] 尚，$\sin\Theta=\sinh\theta/\sinh\phi(|\Theta|<\pi/2)$ である。$m=-1$ では，$\cos\Theta=\cosh\theta/\cosh\phi$ と定義し直し，(4.7a)，(4.7b) 式中の θ, ϕ, Θ についての，次の函数の交換，$\sin(\cdot)$，$\sinh(\cdot)\rightleftarrows\cos(\cdot)$，$\cosh(\cdot)$ から，その解が得られる。一般的な Soliton は周期的な振動（Pulsation）を行い，(4.7) 式のように定常に伝播しない。又，定常Soliton は，$m=1$ で境界値 $|\widetilde{B}^{\pm}|$ が割に小さい時は存在できない。しかし定常 Soliton は簡単な表式を持つ

ので扱いに便利である。今 $m=-1$, $Q=1$, $|\widetilde{B}^{\pm}|$ が有限値，なるケースを考える。ϕ が十分小さくなる様に k を選べる（k を十分大きくすれば良い）ことに注意すれば，次に示す近似ができる。

$$H \cong 2\{1-(\theta/\phi)^2\},\quad W^{-1} \cong |\widetilde{B}^{\pm}|^2\{1-(\theta/\phi)^2\}^{1/2}/\phi,\qquad \cos\Theta \cong 1.\quad (\phi \ll 1) \tag{4.8}$$

これより Soliton は鋭いパルス状（Spiky Soliton）になることが判る。一方 $|B^{\pm}|$ を有限にとどめて $\beta^2 \to 1$ の様子を考える。(4.6), (4.7b) 式より，

$$|\widetilde{B}^{\pm}|^2 = -4mk(\alpha_i-\alpha_e)(1-\beta^2)\cdot\cosh^2\phi = 4k|(\alpha_i-\alpha_e)(1-\beta^2)|\cdot\cosh^2\phi\,.$$

k がやはり有限だとすれば，$1 \ll 2\cosh\phi \cong e^{\phi}$，又これから $\chi \to 1$ となる。$H \leqq 4$, $W^{-1} \leqq 2Q|\widetilde{B}^{\pm}|^2$，特に $W \propto (1-\beta^2)$ となる。これも鋭いパルス状となる。（$m=-1$ も同様である。）

文　　献

(1) T. Kakutani, T. Kawahara and T. Taniuti, "Nonlinear Hydromagnetic Solitary Waves in Collision-Free Plasma with Isothermal Electron Pressure," J. Phys. Soc. Japan, vol. 23 (1967) 1138～1149.

(2) T. Taniuti and C. C. Wei, "Reductive Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation. I", J. Phys. Soc. Japan vol. 24 (1968) 941～946.

(3) T. Kakutani, H. Ono, T. Taniuti and C. C. Wei, "Reductive Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation II, Application to Hydromagnetic Waves in Cold Plasma", J. Phys. Soc. Japan vol. 24 (1968) 1159～1166.

(4) T. Kakutani and H. Ono, "Weak Non-Linear Hydromagnetic Waves in a Cold Collision-Free Plasma", J. Phys. Soc. Japan vol. 26 (1969) 1305～1318.

(5) A. Rogister, "Parallel Propagation of Nonlinear Low-Frequency Waves in High-p plasma", Phys. Fluid vol. 14 (1971) 2733～2739.

(6) 川原啄二，"冷たい非衝突プラズマ中を外部磁場と平行に伝わる非線形磁気流体波," 京大数理研講究録187 p. 1～13（昭48）.

(7) E. Mjolhus, "On the modulationary instability of hydromagnetic waves parrallel to the magnetic field", J. Plasma Phys. vol. 16 (1976) 321～334.

(8) E. Mjolhus, "A note on the modulationary instability of long Alfven wave parallel to the magnetic field", J. Plasma Phys. vol. 19 (1978) 437～447.

(9) K. Mio, T. Ogino, K. Minami and S. Takeda, "Modified Nonlinear Schrödinger Equation for Alfven Waves Propagating along the magnetic Field in Cold Plasmas", J. Phys. Soc. Japan vol. 41 (1976) 265～271.

(10) Y. H. Ichikawa, K. Konno, M. Wadati and H. Sanuki, "Spiky Soliton in Circular Polarized Alfven Wave", Researck Report of IPP Nagoya Unv., 1979, No. IPPJ-399.

(11) A. C. Scott, F. Y. F. Chu and D. W. Mclaughlin, "The Soliton : A New Concept in Applied Science", Proc. IEEE vol. 61 (1973) 1443～1483.

(12) M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur, "The Inverse Scattering Transform Fourier Analysis for Nonlinear Problems", Studd. Appl. Math., vol. 53 (1974) 249～315.

(13) D. J. Kaup and A. C. Newell, "An exact solution for a derivative nonlinear Schrödin-

ger equation", J. Math. Phys., vol. 19 (1978) 798～801.

(14) T. Kawata and H. Inoue, "Exact Solutions of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation under the Nonvanishing Conditions", J. Phys. Soc. Japan vol. 44 (1978) 1968～1976.

(15) T. Kawata, N. Kobayashi and H. Inoue, "Soliton Solutions of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation", J. Phys. Soc. Japan vol. 46 (1979) 1008～1015.

(16) T. Kawata, J. Sakai and N. Kobayashi, "Inverse Method for the Mixed Nonlinear Schrodinger Equation and Soliton Solutions", J. Phys. Soc. Japan vol. 48, No. 4 (1980) and published by the Reseach Report of IPP Nagoya Univ., 1979, No. IPPJ-417.

Nonlinear Alfven weves in a collision-free plasma

Tsutomu KAWATA and Jun-ichi SAKAI

Hydromagnetic waves propagating in a collision-free plasma are investigeted on the basis of hydrodynamical transport equations. Under the consideration of the electron and ion temperatures, we derived the basic equations which describe the one-dimensional propagation with an angle against the external magnetic field. By using the multiple sca-lling method the derivative nonlinear Schrödinger equation is derived for the descrip-tion of the nonlinear dehaviour of Alfven waves propagating parallel to the external magnetic field. As the effect of temperatures, the coefficient of nonlinear term is modi-fied by $1/(1-\beta^2)$, where β is the ratio of the sound velocity and Alfven velocity. Using the result of the inverse scattering method, we examined the stationary solitons and fou-nd that the peculiar modulation ("spiky soliton") arises from the contribution of the plane wave boundary condition and the resonant interaction appearing in the case of $\beta \to 1$.

(1979年10月31日受理)