翼理論積分方程式について

古　谷　嘉　志

On the Integral Equation of Wing Theory.

Yoshiyuki FURUYA

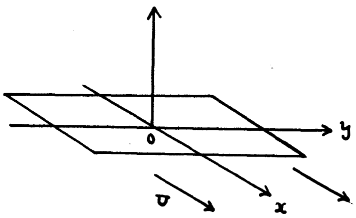
Mathematical theories of wings are treated in this Paper. Auther tried to treat them by solving a Dirichlet problem and by considering by means of the finite Hilbert transformation, and special cases are calculated and shown in graphs.

はしがき

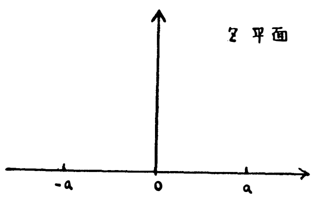
気流中におかれた有限巾の平板のまわりの流れの解析をディリクレ問題を解いて求める方法と翼理論積分方程式を解いて求める方法で示した。又或る特殊な形の平板に関する数値計算を行った。

〔I〕第一部

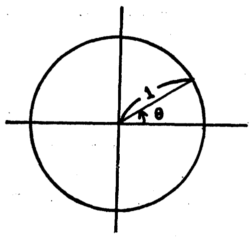
基礎理論



図—1



図—2



図—3

主流 U の流れの中に置かれた翼巾 $2a$ なる薄翼を考える。図—1のように主流方向をx軸に流れに垂直に z 軸をとる。y—z 面を図—2に示す。Prandtle の揚力線理論によると主翼の軸のまわりには，

$$\Gamma(y)=\frac{1}{2}a_0\mathrm{UC}\left(\alpha_0+\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{U}}\right) \tag{1}$$

なる渦分布が生じている。[1)] a_0 は定数，ここでは平板の時の理論値 2π を用いる。α_0 は翼の迎角，C は翼弦長，W は翼後方に生じた渦による誘起速度である。速度ポテンシャルを ϕ とすると，

$$\Gamma(y)=\phi(y,+0)-\phi(y,-0)=2\phi(y)\quad -a\leqq y\leqq a$$

$$\phi(y,+0)=-\phi(y,-0)$$

が成り立つから(1)は

$$\left.\begin{aligned}2\phi&=\frac{1}{2}a_0\mathrm{Uc}\left(\alpha_0+\frac{1}{2\mathrm{U}}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\quad z==0\\2\phi&=-\frac{1}{2}a_0\mathrm{Uc}\left(\alpha_0+\frac{1}{2\mathrm{U}}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\quad z=-0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

となる。[(1)]

次に図—2の $y—z$ 平面を

$$y+iz=\frac{a}{2}(\zeta+\zeta^{-1}) \tag{3}$$

なる変換にって ζ 平面（図—3）に変換すると $-a\leqq y\leqq a$ なる翼は，ζ— 平面上の単位円に写像される。

$$\zeta=\mathrm{r}e^{i\theta} \quad (y=a\cos\theta) \tag{3'}$$

と置いて(2)を変形すると，

$$\left.\begin{aligned} &2\phi=\frac{1}{2}a_0\mathrm{Uc}\left(\alpha_0+\frac{1}{2a\mathrm{U}\sin\theta}\ \frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{r}}\right)\\ &\phi(\theta)=-\phi(2\pi-\theta)\\ &\qquad\mathrm{r}=1,\quad 0\leqq\theta\leqq2\pi \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

となる。

$(\mathrm{C}a_0)_\varDelta$ を $y=0$ における翼弦長と a_0 の積とし，

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{f}(\theta)=\frac{(\mathrm{C}a_0)_\varDelta}{\mathrm{C}a_0}\sin\theta=\mathrm{f}(2\pi-\theta)\\ &\mathrm{g}(\theta)=\mathrm{U}(\mathrm{C}a_0)_\varDelta\,\alpha_0\sin\theta=\mathrm{g}(2\pi-\theta)\\ &\qquad l=(\mathrm{C}a_0)_\varDelta/2a>0\qquad(0\leqq\theta\leqq2\pi \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

なる量を導入すると(4)は，

$$\left.\begin{aligned} &4\mathrm{f}\cdot\phi-l\,\partial\phi/\partial\mathrm{r}=\mathrm{g}\\ &\phi(\theta)=-\phi(2\pi-\theta) \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

となる。

ϕ は調和関数であるから，

$$\varDelta\phi=0 \tag{6}$$

が成り立つ。

問題を簡単にするために迎角 α_0 を零とすると問題は，

$$4\mathrm{f}\cdot\phi=l\ \partial\phi/\partial\mathrm{r} \tag{$4_1''$}$$

$$\phi(\theta)=-\phi(2\pi-\theta) \tag{$4''_2$}$$

$$(\mathrm{r}=1)$$

なる境界条件のもとで $\varDelta\phi=0$ を解く問題となる。

ζ 平面上では，

$$\varDelta\phi=\frac{\partial}{\partial\mathrm{r}}\left(\mathrm{r}\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{r}}\right)+\frac{1}{\mathrm{r}}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=0$$

$$\therefore\quad \partial^2\phi/\partial\mathrm{r}^2+1/\mathrm{r}\ \partial\phi/\partial\mathrm{r}+1/\mathrm{r}^2\ \partial^2\phi/\partial\mathrm{r}^2=0$$

$\phi=\mathrm{R(r)}\ \Theta(\theta)$ とおくと，

$$\mathrm{r}^2\,\mathrm{d}^2\mathrm{R}/\mathrm{dr}^2+\mathrm{r\ dR/dr}=-1/\Theta\ \mathrm{d}^2\Theta/\mathrm{d}\theta^2=n^2\ (\text{定数})$$

$$\therefore\quad \mathrm{r}^2\ \mathrm{d}^2\mathrm{R}/\mathrm{dr}^2+\mathrm{r\ dR/dr}=n^2 \tag{7a}$$

$$\mathrm{d}^2\Theta/\mathrm{d}\theta^2+n^2\Theta=9 \tag{b}$$

(7b) より　$\Theta=\mathrm{A}_n\sin n\theta+\mathrm{B}_u\cos n\varepsilon$ （A_n，B_n は定数）

解は 2π なる周期を持つことは明らかだから n は整数なることがわかる。

$$\therefore\quad \Theta=\mathrm{A}_n\sin n\theta\ (n\ \text{は整数}) \tag{8}$$

(7a) より　$\mathrm{R}=\mathrm{r}^n$　又は　r^{-n}　$(n>0)$

流れの性質により $\mathrm{r}\to\infty$ で $\phi\to0$ であるから，

$$\mathrm{R}=\mathrm{r}^{-n}\quad (n\ \text{は正整数}) \tag{9}$$

となる。

故に解は,

$$\phi=\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-n}\sin n\theta \tag{10}$$

となる。

$$(\partial\phi/\partial r)_{r=1}=\sum_{n=1}^{\infty}-nA_n\sin n\theta$$

$$\therefore\quad A_n=-1/n\pi\int_0^{2\pi}(\partial\phi/\partial r)_{r=1}\sin n\tau d \tag{11}$$

(9)と(10)より

$$\phi=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\tau\sin n\theta}{n}\frac{\partial\phi}{\partial r}d\tau \quad (r=1) \tag{12}$$

(4″) より

$$\phi=-\frac{4}{\pi l}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\tau\sin n\theta}{n}f(\tau)\ \phi(\tau)\ d\tau \quad (r=1) \tag{13}$$

なる積分方程式が成り立つ。

例　楕円翼の問題

楕円翼なら　$(Ca_0)_\Delta\sin\theta=Ca_0$

$\therefore\quad f(\theta)=1$

故に(13)は,

$$-4/(\pi l)=\lambda \tag{14}$$

とおくと,

$$\phi(\theta)=\lambda\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta\sin n\tau}{n}\phi(\tau)\ d\tau \tag{13'}$$

となる。この式が $\phi(\theta)=0$ 以外の解をもつためには,

$$\lambda=n/\pi\quad \phi(\theta)=C\sin n\theta\quad (n=1,2,\cdots\cdots) \tag{15}$$

でなければならない。これにより (13′) の固有値は n/π, 固有関数は $\sin n\theta/\sqrt{\pi}$ となる。

数　値　計　算

ここでは矩形翼に近い翼形に対する解を求める。計算を簡単にするために $f(\theta)$ をフーリエ級数二項で示した最も矩形に近い翼形の問題を取り扱う。

$$f(\theta)=\frac{(Ca_0)_\Delta}{Ca_0}\sin\theta=\frac{C}{C_\Delta}\sin\theta \tag{16}$$

$f(\theta)=b_0+b_2\cos 2\theta$　とおくと,

$$\frac{C}{C_\Delta}(b_0+b_2\cos 2\theta)=\sin\theta$$

$(0,\ \pi)$ で $C/C_\Delta=1$　として b_0, b_2 を求めると,

$b_0=2/\pi$, $b_2=4/3\pi$　となる。

故に

$$f(\theta)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{3\pi}\cos 2\theta \tag{17}$$

(3′) (16)と(17)から

$$\frac{C}{C_\Delta}=\frac{3\pi}{2}\ \frac{\sin\theta}{3-2\cos 2\theta} \tag{18}$$

(18)がここでは取り扱う翼形である。これを図―4に示す。

次にポテンシャル ϕ をフーリエ級数四項で表わすと(4)を考えに入れることにより，

$$\phi=C_1\sin\theta+C_2\sin 2\theta+C_3\sin 3\theta+C_4\sin 4\theta \tag{19}$$

と表わせる。(19)，(17)を(13)に代入し，係数を比較することにより，

$$\begin{aligned}
&2\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi\lambda}\right)C_1 - \frac{4}{3\pi}C_3 = 0\\
&2\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi\lambda}\right)C_2 - \frac{4}{3\pi}C_3 = 0\\
&-\frac{4}{3\pi}C_1 + 2\left(\frac{2}{\pi}-\frac{3}{\pi\lambda}\right)C_3 = 0\\
&-\frac{4}{3\pi}C_2 + 2\left(\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi\lambda}\right)C_4 = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

を得る。次にこの式から ϕ が零でない解であるために必要な λ，即固有値を求める。(19)の第三項以上を省略すると λ は，

$$\begin{vmatrix} 2\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi\lambda}\right) & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi\lambda}\right) \end{vmatrix}=0$$

を解いて $\lambda=1$ 又は 1/2 と得られる。次に第四項のみを略すと，

$$\begin{vmatrix} 2\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi\lambda}\right)C_1 & 0 & -\frac{4}{3\pi} \\ 0 & 2\left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\pi\lambda}\right) & -\frac{4}{3\pi} \\ -\frac{4}{3\pi} & 0 & 2\left(\frac{2}{\pi}-\frac{3}{\pi\lambda}\right) \end{vmatrix}=0$$

即 $$8\left(\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi\lambda}\right)\left(\frac{32}{9\pi^2}-\frac{8}{\pi^2}\ \frac{1}{\lambda}+\frac{3}{\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\right)=0$$

を解いて $\lambda=1$ を得る。同様にして四項迄全部とると，

$$16\left(\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\ \frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\ \frac{1}{\lambda}\right)\left\{\frac{32}{9\pi^2}-\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{3}{\pi^2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\right\}=0$$

を解いて $\lambda=1$ 又は2を得る。

以上のことにより $\lambda=1$ が固有値であることは明らかである。よって $\lambda=1$ の場合について ϕ を求める。

$\lambda=1$ を(20)に代入すると，

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi}C_1-\frac{4}{3\pi}C_3=0\\
&\frac{2}{\pi}C_2-\frac{4}{3\pi}C_3=0\\
&-\frac{4}{3\pi}C_1-\frac{2}{\pi}C_3=0\\
&-\frac{4}{3\pi}C_2-\frac{4}{\pi}C_4=0
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

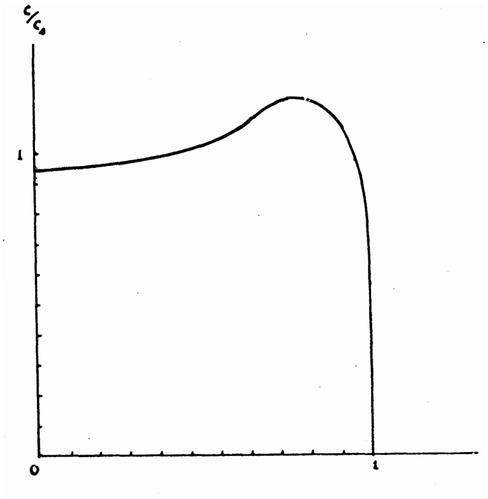
を得る。これより $C_2=C_1$, $C_3=\frac{3}{2}C_1$, $C_4=-\frac{1}{3}C_1$, を得る。

故に (19), (4′) より

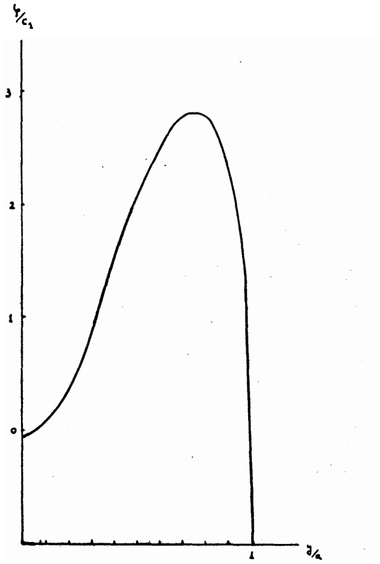
$$\left.\begin{aligned}\phi&=C_1\left\{\sin\theta+\sin2\theta+\frac{3}{2}\sin3\theta-\frac{1}{3}\sin4\theta\right\}\\ y&=a\cos\theta\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

を得る。

即ち(14)より $4/\pi l=1$ $l=\frac{4}{\pi}$ 即ち半翼巾 $a=\frac{2\pi^2}{8}C_\Delta$ なる図—4のごとき翼のポテンシャル分布は(22)によって与えられる。これを図—5に示す。



図—4



図—5

結　　　　語

この論文では迎角が零の場合を取り扱ったがこれが零でないと積分方程式(13)は第二種の Fredholm 型積分方程式となるので取扱いがむずかしくなる。又固有値の求め方は このような近似法の近似度を順次高くすることにより すべての値を知ることができると思うが この研究は次回にまわすことにする。

〔II〕 第二部

基礎方程式

第 I 部(1)式

$$\Gamma(y)=\frac{1}{2}a_0UC(y)\left(\alpha_0+\frac{W}{U}\right)\qquad(1)$$

を変形する。翼後方の渦面によって翼面上に誘導される速度の垂直成分は,

$$W=\frac{1}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\Gamma'(\xi)}{\xi-y}d\xi\qquad(2)$$

(積分は Causchy の主値をとるものとする)。

と表わせる[1]から(2)と(1)に代入し，

$$a_0 UC(y)/8U = B(y) \qquad 4U\alpha_0(y) = f(y)$$

とおくと，

$$\frac{\Gamma(t)}{B(t)} + \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{\Gamma'(\xi)}{t-\xi} d\xi = f(t) \tag{3}$$

が得られる。[1,4] ここでは矩形翼に近い翼形に関する(3)の解法を試みる。

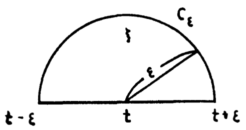
基 礎 理 論 (1)

$$\frac{1}{\pi i}\int_{a}^{b} \frac{\phi(t)}{t-\xi} dt = f(\xi) \tag{4}$$

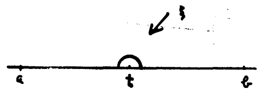
を $\phi(\xi)$ について解く問題を考える。これは実積分で積分は主値をとるものとする。

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{b} \frac{\phi(z)}{z-\xi} dz \tag{5}$$

とおく。図―6のごとく複素平面をとり ξ を上側から実軸上の一点 t ($a \leqq t \leqq b$) に近づけた時の (5)の様子をくらべる。t を中心にして ξ を中に含むような半径 ε の半円 C_ε を図―7のようにかく。(5)の積分を次のごとく表わす。



図―6



図―7

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{a}^{t-\varepsilon} \frac{\phi(z)}{z-\xi} dz + \int_{t+\varepsilon}^{b} \frac{\phi(z)}{z-\xi} dz + \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{\phi(z)}{z-\xi} dz\right] \tag{6}$$

次に(5)即(6)の $\xi \to t$，即 $\varepsilon \to 0$ の極限を計算する。まづ(6)の [ ] 内第三項を計算する。図―7においで $\phi(z)/z-\xi$ を $(t-\varepsilon) \to (t+\varepsilon) \to C\varepsilon$ の径路で積分する。Causchy の積分表示によって

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{\phi(z)}{z-\xi} dz + \int_{C_\varepsilon} \frac{\phi(z)}{z-\xi} dz = 2\pi i \phi(t) \tag{7}$$

(7)の左辺第二項の計算を行うと

$$\xi \to t \quad \int_{C_\varepsilon} \frac{\phi(z)}{z-\xi} dz \longrightarrow \int_{C_\varepsilon} \frac{\phi(z)}{z-\xi} dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{\phi(z)-\phi(t)}{z-t} dz + \phi(t)\int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z-t}$$

ϕ が Lipschitz の条件を満足すると $\varepsilon \to 0 (t \to \xi)$ で第一項は零となり第二項は $\pi i \phi(t)$ となる[1,2]ことにより(7)は

$\varepsilon \to 0$ ($\xi \to t$) で

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{\phi(z)}{z-\xi} dz = \pi i \phi(t) \tag{8}$$

となる。(6)で $\varepsilon \to 0$ ($\xi \to t$) として(8)を代入すると

$$\Phi^{+}(t) = \frac{1}{2}\phi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{b} \frac{\phi(z)}{z-t} dz \tag{9}$$

が成り立つ。ここに $\Phi^{+}(t)$ は ξ を複素平面上半面から実軸上の値 t に近づけた値である。

同様にして下半面から近づけた値として

$$\Phi^{-}(t) = -\frac{1}{2}\Phi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{a}^{b} \frac{\phi(z)}{z-t} dz \tag{10}$$

が得られる。

(4)，(9)と(10)より

$$\Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t) = f(t) \tag{11}$$

$$\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=\phi(t) \tag{12}$$

が成立する。

$$\left(\sqrt{(t-a)(t-b)}\right)^{+}=-\left(\sqrt{(t-a)(t-b)}\right)^{-}$$

なることを用いると(11)は[(2),(3)]

$$\left[\sqrt{(t-a)(t-b)}\Phi(t)\right]^{+}-\left[\sqrt{(t-a)(t-b)}\Phi(t)\right]^{-}=f(t)\sqrt{(t-a)(t-b)} \tag{13}$$

(5), (12)を考慮することにより

$$\sqrt{(z-a)(z-b)}\;\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}}{\xi-z}d\xi$$

$$\therefore\quad \Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi \tag{14}$$

これを(12)に代入すれば

$$\phi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_a^b\frac{\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}\frac{f(\xi)}{\xi-t}d\xi \tag{15}$$

基 礎 理 論 (2)

(3)を変形する。

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\Gamma'(\xi)}{t-\xi}d\xi=f(t)-\frac{\Gamma(t)}{B(t)} \tag{3'}$$

(15)を用いてこれを Γ' について解くと

$$\Gamma'(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\sqrt{a^2-t^2}}\frac{\Gamma(\xi)}{t-\xi}d\xi-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\sqrt{a^2-t^2}}\frac{f(\xi)}{t-\xi}d\xi$$
$$+C/\sqrt{a^2-t^2} \tag{15}$$

翼を左右対称とすると $\Gamma(t)$ は偶関数となり $\Gamma'(t)=-\Gamma'(-t)$ $\therefore$ $\Gamma'(0)=0$ 故に $C=0$ となる。又問題を簡単にするために翼の迎角を零とすると $f(t)=0$となり(16)は,

$$\Gamma'(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\sqrt{a^2-t^2}}\frac{\Gamma(\xi)}{B(\xi)}\frac{d\xi}{t-\xi} \tag{17}$$

となる。

(17)の両辺に $B(t)$ をかけて変形する。

$$B(t)\Gamma'(t)=B(t)/\pi\sqrt{a^2-t^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\xi^2}/B(\xi)(t-\xi)\;\Gamma(\xi)d\xi$$
$$=1/\pi\int_{-a}^{a}\Gamma(\xi)/t-\xi\;d\xi-1/\pi\int_{-a}^{a}\Gamma(\xi)/t-\xi\;d\xi$$
$$+\frac{B(t)}{\pi\sqrt{a^2-t^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{t-\xi}\frac{\Gamma(\xi)}{B(\xi)}d\xi$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\Gamma(\xi)/t-\xi\;d\xi+1/\pi\int_{-a}^{a}B(t)/(t-\xi)\sqrt{a^2-t^2}$$
$$\times\left[\sqrt{a^2-\xi^2}/B(\xi)-\sqrt{a^2-t^2}/B(t)\right]\Gamma(\xi)d\xi$$

$$\therefore\quad B(t)\Gamma'(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\Gamma(\xi)}{t-\xi}d\xi+g(t) \tag{18}$$

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\frac{B(t)}{\sqrt{a^2-t^2}}\int_{-a}^{a}\Gamma(\xi)\frac{R(\xi,t)}{t-\xi}d\xi \tag{19}$$

$$R(\xi,\ t)=\frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{B(\xi)}-\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{B(t)} \tag{20}$$

(18)を微分して，

$$\frac{d}{dt}[B(t)\Gamma'(t)]=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\Gamma'(\xi)}{t-\xi}d\xi+\frac{dg(t)}{dt}$$

(3′) を代入して，

$$\frac{d}{dt}[B(t)\Gamma'(t)]=-\frac{\Gamma(t)}{B(t)}+\frac{dg(t)}{dt}$$

$$\therefore\quad B(t)\ [B(t)\Gamma'(t)]'+\Gamma(t)=B(t)\frac{dg(t)}{dt} \tag{21}$$

翼型を $B(t)=\sqrt{a^2-t^2}\ \dfrac{a^2+\mu t^2}{a^2+\nu t^2}$ とすると

$$\frac{R(\xi,t)}{t-\xi}=\frac{(\nu-\mu)(t+\xi)}{a^2(1+\mu t^2/a^2)(1+\mu\xi^2/a^2)}$$

$$\therefore\quad \int_{-a}^{a}\frac{R(\xi,t)}{t-\xi}d\xi=\frac{a^2(\nu-\mu)}{a^2+\mu t^2}\int_{-a}^{a}\frac{t+\xi}{a^2+\mu\xi^2}d\xi$$

$$\therefore\quad g(t)=\frac{a^2}{\pi}\ \frac{\nu-\mu}{a^2+\nu t^2}\int_{-a}^{a}\frac{t-\xi}{a^2+\mu\xi^2}\Gamma(\xi)d\xi$$

これを t で微分して

$$\frac{dg(t)}{at}=\frac{a^2(\nu-\mu)}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{a^2+2\nu\xi t-\nu t^2}{(a^2+\nu t^2)^2}\ \frac{\Gamma(\xi)}{a^2+\mu\xi^2}d\xi \tag{22}$$

次に

$$\Gamma(t)=a_0+a_1t^2+a_2t^4+a_3t^6+a_4t^8 \tag{23}$$

とおいて

$$B(t)\ [B(t)\Gamma'(t)]+\Gamma(t)=B(t)\frac{dg(t)}{dt} \tag{21}$$

を解くことを考える。

$B(t)/a=\sqrt{1-(t/a)^2}\ \ 1+\mu(t/a)^2 1+\nu(t/a)^2$ を展開する。

$$\sqrt{1-(t/a)^2}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{a}\right)^2-\frac{1}{2!2^2}\left(\frac{t}{a}\right)^4-\frac{3}{2^3\cdot 3!}\left(\frac{t}{a}\right)^6-\frac{5\cdot 3\cdot 1}{2^4\cdot 4!}\left(\frac{t}{a}\right)^8+\cdots\cdots$$

$$\frac{1+\mu(t/a)^2}{1+\nu(t/a)^2}=1-(\nu-\mu)\left(\frac{t}{a}\right)_2+\nu(\nu-\mu)\left(\frac{t}{a}\right)^4-\nu^2(\nu-\mu)\left(\frac{t}{a}\right)^6$$
$$+\nu^3(\nu-\mu)\ (t/a)^8+\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad B(t)/a=1&-\left[\frac{1}{2}+(\nu-\mu)\right]\left(\frac{t}{a}\right)^2\\&+\left[-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}(\nu-\mu)+\nu(\nu-\mu)\right]\left(\frac{t}{a}\right)^4\\&+\left[-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}(\nu-\mu)-\frac{1}{2}\nu(\nu-\mu)-\nu^2(\nu-\mu)\right]\left(\frac{t}{a}\right)^6\\&+\left[-\frac{5}{128}+\frac{\nu-\mu}{16}-\frac{1}{8}\nu(\nu-\mu)+\frac{1}{2}\nu^2(\nu-\mu)+\nu^3(\nu-\mu)\right]\left(\frac{t}{a}\right)^8\\&+\cdots\cdots\end{aligned} \tag{24}$$

同様に(23)を(22)に代入して dg(t)/dt を展開する。

$$dg(t)/dt=(\nu-\mu)/\pi(a^2+\nu t^2)^2\int_{-a}^{a}\{(a^2-\nu t^2)+2\nu t\xi\}$$
$$\times\{1-\mu(\xi/a)^2+\mu^2(\xi/a)^4-\mu^3(\xi/a)^6+\mu^4(\xi/a)^8+\cdots\cdots\}$$

$$\times(a_6+a_1\xi^2+a_2\xi^4+a_3\xi^6+a_4\xi^8)d\xi$$

以下問題を簡略化するために $a=1$ とおく。

上の計算を続けると,

$$dg(t)/dt=2(\nu-\mu)(1-\nu t^2)/\pi(1+\nu t^2)$$

$$\times\Big[a_0-\frac{1}{3}(a_0\mu-a_1)+\frac{1}{5}(a_0\mu^2-a_1\mu+a_2)$$

$$-\frac{1}{7}(a_0\mu^3-a_1\mu^2+a_2\mu-a_3)+\frac{1}{9}(a_0\mu^4-a_1\mu^3+a_2\mu^2-a_3\mu+a_4)\Big]$$

$$dg(t)/dt=F\ (1-2\nu t^2+2\nu^{24}-2\nu^3t^6+2\nu^4t^8+\cdots\cdots)$$

$$F=\frac{2(\nu-\mu)}{\pi}\Big[a_0-\frac{1}{3}(a_0\mu-a_1)+\frac{1}{5}(a_0\mu^2-a_1\mu+a_2)$$

$$-\frac{1}{7}(a_0\mu^3-a_1\mu^2+a_2\mu-a_3)$$

$$+\frac{1}{9}(a_0\mu^4-a_1\mu^3+a_2\mu^2-a_3\mu+a_4)\Big]$$

$$=\frac{2(\nu-\mu)}{\pi}\Big[a_0\Big(1-\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{5}\mu^2+\frac{1}{7}\mu^3+\frac{1}{9}\mu^4\Big)$$

$$+a_1\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\mu+\frac{1}{7}\mu^2+\frac{1}{9}\mu^3\Big)+a_2\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\mu+\frac{1}{9}\mu^2\Big)$$

$$+a_3\Big(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\mu\Big)+\frac{1}{9}a_4+\cdots\cdots\ \Big] \tag{25}$$

$a=1$ とすると(24)は

$$B(t)=1+At^2+Bt^4+Ct_6+Dt^8$$

$$\left.\begin{aligned}&A=-\frac{1}{2}-(\nu-\mu),\ B=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}(\nu-\mu)+\nu(\nu-\mu)\\&C=-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}(\nu-\mu)-\frac{1}{2}\nu(\nu-\mu)-\nu^2(\nu-\mu)\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$D=-\frac{5}{188}+\frac{\nu-\mu}{16}-\frac{1}{8}\nu(\nu-\mu)+\frac{1}{2}\nu^2(\nu-\mu)+\nu^3(\nu-\mu)$$

(23)より

$$\Gamma'(t)=2a_1t+4a_2t^3+6a_3t^6+8a_4t^7+9a_5t^9 \tag{27}$$

(27)と(26)をかけて

$$B(t)\Gamma'(t)=2a_1t+(2a_1A+4a_2)t^3+(2a_1B+4a_2A+6a_3)t^5$$

$$+(2a_1C+2a_2B+6a_3A+8a_4)t^7$$

$$+(2a_1D+4a_2C+6a_3B+8a_4A+9a_5)t^9+\cdots\cdots \tag{28}$$

(28)より

$$\frac{d}{dt}[B(t)\Gamma'(t)]=2a_1+3(2a_1A+4a_2)t^2+5(a_1B+4a_2A+6a_3)t^4$$

$$+7(2a_1C+2a_2B+6a_3A+8a_4)t^6$$

$$+9(2a_1D+4a_2C+6a_3B+8a_4A+9a_5)t^8+\cdots- \tag{29}$$

(26)と(29)をかけて

$$B(t)\frac{d}{dt}[B(t)\Gamma'(t)]=2a_1+(8a_1A+12a_2)t^2$$

$$+(6a_1A^2+22a_2A+12a_1B+30a_3)t^4$$

$$+(20a_2A^2+16a_1AB+72a_3A+26a_2B+16a_1C+56a_4)t^6$$

$$+(20a_1D+48a_2C+20a_1AC+84a_3B$$

$$+34a_2AB+128a_4A+42a_3A^2+10a_1B^2+81a_4)t^8+\cdots\cdots \tag{30}$$

(25)に(26)をかけると，

$$B(t)\,dg(t)/dt=F[1+(A-2\nu)t^2+(B-2\nu A+2\nu^2)t^4$$
$$+(C-2\nu B+2\nu^2A-2\nu^3)t^6+(D-2\nu C+2\nu^2B-2\nu^3A+2\nu^4)t^8+\cdots\cdots] \tag{31}$$

(30)に(23)を加えて

$$B(t)\frac{d}{dt}[B(t)\Gamma'(t)]+\Gamma(t)=(2a_1+a_0)+(a_1+8a_1A+12a_2)t^2$$
$$+(a_2+6a_1A^2+22a_2A+12a_1B+30a_3)t^4$$
$$+(a_3+20a_2A^2+16a_1AB+72a_3A+26a_2B+16a_1C+56a_4)t^6$$
$$+(a_4+20a_1D+48a_2C+20a_1AC+84a_3B+34a_2AB$$
$$+128a_4A+42a_3A^2+10a_1B^2+81a^4)t^8+\cdots\cdots \tag{32}$$

(21)によって(31)と(32)を等しいとおいて名係数 a_1，a_2，a_3，a_4，……を決定する。

即ち

$$2a_1+a_0=F$$
$$(1+8A)a_1+12a_2=(A--2\nu)F$$
$$(6A^2+12B)a_1+(1+22A)a_2+30a_3=F(B-2\nu A+2\nu^2)$$
$$(16AB+16C)a_1+(26B+20A^2)a_2+(1+72A)a_3+56a_4=F(C-2\nu B+2\nu^2)$$
$$(20AC+10B^2+20D)a_1+(48C+34AB)a_2+(84B+42A^2)a_3+$$
$$(128A+81+1)a_4=F(D-2\nu C+2\nu^2B-2\nu^3A+2\nu^4) \tag{33}$$

なる連立方程式を解いて a_1，a_2，a_3，a_4，を決定することができる。

数 値 計 算

前出の如く翼型を $B(t)=\sqrt{a^2-t^2}\ \{a^2+\mu t^2/a^2+\nu t^2\}$ としたが，ここで $\mu=6.9$，$\nu=0$ とおく[(1)(4)]とほぼ矩形の翼型ができる。これを図―8に示す。ここではこの翼型に関する数値計算を行う。

(25)に上の数値を代入すると，

$$F=-0.4762a_0-0.1088a_1-0.9251a_2$$
$$-0.0246a_3-0.0637a_4$$

又(26)に代入してA，B，C，D，を求めると，

$$A=0.4\quad B=-0.575\quad C=-1.1875\quad D=-0.0954$$

が得られる。

これらの数値を(33)に代入すると a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 に関する次の連立方程式が得られる。

$$\left.\begin{array}{ll} 2.4762a_1+0.9251a_2+0.0246a_3+0.1111a_4 & =-1.4762a_0 \\ 3.4a_1+12a_2 & =\ 0.4a_0 \\ -4.79a_1+9.8a_2+30a_3 & =-0.575a_0 \\ -53.4890a_1-11.75a_2+29.8a_3+56a_4 & =-1.1875a_0 \end{array}\right\} \tag{34}$$

これを解くと，

$$\left.\begin{array}{ll} a_1=-0.6251a_0, & a_2=0.04046a_0 \\ a_3=-0.12499a_0, & a_4=-0.04663a_0 \end{array}\right\} \tag{35}$$

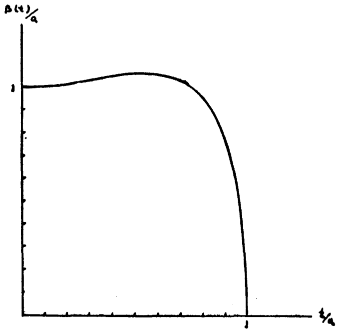
が得られる。

又(23)から $a_0=\Gamma(0)$ であることがわかる。

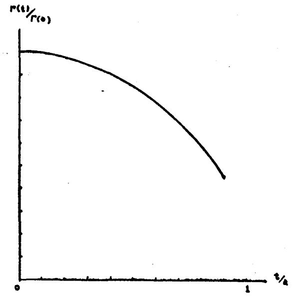
(35)と $a_0=\Gamma(0)$ を (23)に代入すると，

$$\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(0)}=1-0.6251t^2+0.0405t^4-0.1250t^6-0.0466t^8 \tag{36}$$

なる Γ(t) の分布が得られる。この数値計算の結果を図―9に示す。



図―9



図―8

結　　　語

ここでは Γ(t) を級数に展開して未定係数決定法で Γ(t) を求めたがこの方法は翼型が特殊なもの以外は求めにくい。又翼端に近づく程誤差が大きくなる欠点がある。(翼の中心附近ではこの計算法で小数四位迄正確である。)

次回には別の解法で更に一般の B(t) について適用される解法を考えるつもりである。

参考文献

(1) 近藤次郎　積分方程式とその応用（コロナ）

(2) スミルノフ，高等数学教程⑧（共立）

(3) スミノルフ，高等数学教程⑥（共立）

(4) 近藤次郎，積分方程式（培風館）

(昭和37年10月31日受付)